

石礫河川の土砂移動機構に着目した 1次元河床変動解析法の開発

DEVELOPMENT OF 1-D RIVER BED VARIATION ANALYSIS METHOD BASED
ON SEDIMENT TRANSPORT MECHANISM IN STONY BED RIVERS

長田健吾¹・福岡捷二²
Kengo OSADA and Shoji FUKUOKA

¹正会員 博士(工学) 中央大学研究開発機構助教(〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27)

²フェロー会員 Ph.D 工博 中央大学研究開発機構教授(〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27)

In the case of the stony bed river with wide grain size distribution, boulders, which would not move during a flood, act as strong resistance element to the fluid. The other side, sand and gravel can stay in the bed irregularities formed by boulders. Therefore, the stony bed river will be in the stationary equilibrium condition of no sediment transport when the river bed form and grain size distribution corresponding to tractive force are established. However, in the past river bed variation analysis, this essential mechanism in the stony bed river can not be taken into consideration. In this study, we developed a new method of 1-D bed variation analysis in the stony rivers with well graded sediment stony rivers by considering the riverbed's stability mechanism by boulders, and we verify the applicability of the present model by the field experiment carried out in the Joganji River.

Key Words : *stony bed river, well graded sediment distribution, field experiment
bed variation analysis, boulder, static equilibrium condition*

1. 序論

広い粒度分布で構成される石や礫からなる石礫河川の河床変動機構の解明を目的として、これまで数多くの研究がなされてきた¹⁾。しかし、このような研究は主に礫(0.2cm~7.5cm)河川における成果がほとんどで、巨石(30cm以上)を含む石礫河川における河床変動機構の解明は、急流河川における計測等の困難さから十分に行なわれていなかった。

著者ら^{2),3)}は、石礫河川の河床変動機構の解明を目的として、常願寺川において大規模現地実験を行なった。石礫河川では、洪水流により河床が洗掘されると、河床に埋もれていた巨石などの大きな河床材料が出現し、それらが移動しないことで洪水流への大きな抵抗要素となる。また、その移動しない巨石の遮蔽効果により、中小の砂礫は、その周囲に形成された後流域などに留まることができる。よって、石礫河川では、流れに応じた河床形状、河床材料粒度分布を形成することにより、石や礫が移動しない静的平衡状態となり、これが石礫河川の河床変動過程における重要な機構である。

従来の石礫河川における河床変動解析法は、一般に粒径別流砂量式と河床および粒度の連続式⁴⁾により構成される。粒径別流砂量の算出には芦田・道上式⁵⁾などが一般的に用いられ、その式中の粒径別限界掃流力の算出には、Egiazaroff式⁶⁾を芦田・道上⁵⁾により修正された式が用いられる。しかし、福岡ら³⁾は、修正Egiazaroff式から算出した粒径別限界掃流力と掃流力との比較から、実際には静的平衡となった河床状態において、修正Egiazaroff式では砂礫が移動するという結果を示している。これより、修正Egiazaroff式は、上述したような巨石による遮蔽効果を十分考慮できておらず、石礫河川に適用することが難しいことが明らかになった。

石礫河川では、洪水時における石や礫の移動が激しく、護岸際の河床洗掘や河岸侵食が起りやすい。その対応策として、護岸の根継ぎや河岸侵食を受けた箇所の新たな護岸の設置などが行われるものの、洗掘や侵食の発生場所や規模が予測できないため、有用な対策が採れないのが現状である。また、ダム等の横断構造物により大きな河床材料の流下が妨げられ、さらに、砂利採取により特定の粒径集団が河川外に持ち出されることにより、粒度分布が変化してきている。とくに、大きな材料集団が

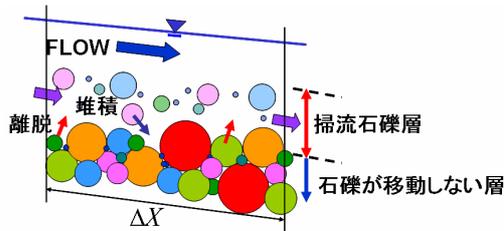


図-1 新しい河床変動解析法の概要

少なくなった箇所は、洪水流に対する耐力が低下し、より大きな河床洗掘が発生する恐れがあると考えられる。洪水流に対して、どのような河床材料集団があれば安定な河床を形成できるのかといった評価を行うためには、石礫河川における精度良い河床変動解析法を確立することが重要である。

本研究では、石礫の移動機構に着目した新しい1次元河床変動解析法を構築する。本解析法は、河床変動および流量規模に伴って変化する水面形の時間変化と河床変動を一体として考える。とくに、河床変動は、石礫河川における河床変動の重要な機構である河床材料の静的平衡を組み込んだものとなっている。本解析法を常願寺川の大規模現地実験²⁾に適用し、その検証を行う。また、既往の解析法と本解析法の考え方の違いと、既往の解析法の問題点について述べる。

2. 新しい1次元河床変動解析法

石礫の移動機構に基づいて構築した、石礫河川の新しい河床変動解析法について説明する。まず、本解析法の基本的な考え方を述べる。巨石を有する石礫河川では、洗掘の段階でその巨石が大きく露出し、流体場への抵抗として働く。一方、周囲の砂礫は巨石の遮蔽効果によりその場に留まることが出来る。このように、巨石が河床の安定に大きく貢献しており、巨石の効果を十分考慮した解析法の構築が重要である。解析に巨石の効果を組み込むため、河床の凹凸を考慮することが必要であると考える。従来の河床変動解析法のように計算格子内で河床高を一定とするのではなく、河床表面にある各粒径の高さを計算する方法を考えた。その方法を組み込むために、図-1に示すように、掃流石礫層（粒子移動層）と石礫が移動しない層（河床）を完全に分離し、この評価のために、流砂量および河床変動量を、河床からの離脱量と河床からの堆積量を用いた式を構築した。以下に、その概要を順に説明する。

図-2に、構築した河床変動解析法の過程を示す。流れ場の計算は、式(1)、式(2)により行う。ここで、運動方程式の河床抵抗項は、一般的には摩擦抵抗としてマニング粗度係数等で表現される。しかし、巨石等の大粒径材料が存在する河道では、そのような材料による形状抵抗の方が支配的となる。本解析法では、河床に存在する

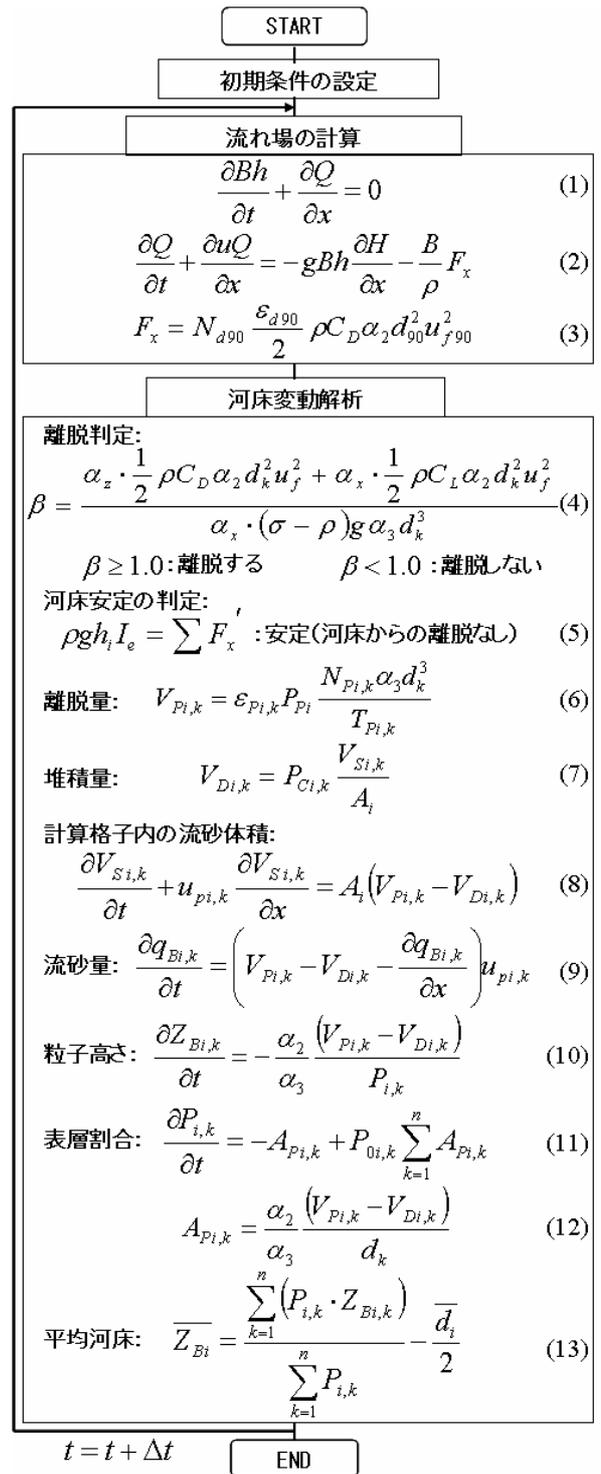


図-2 河床変動の解析過程

d80以上の材料が抵抗に寄与すると考え³⁾、d80と最大粒径の中間値であるd90を用いて、式(3)により抵抗値を評価する。N_{d90}は、単位面積あたりの河床に存在する抵抗に寄与する粒子数で、d80以上が抵抗に寄与するので単位面積の20%分の個数である。単位面積の20%におけるd90の個数は、以下の式で算出する。

$$N_{d90} = \frac{0.2}{\alpha_2 d_{90}^2} \quad (14)$$

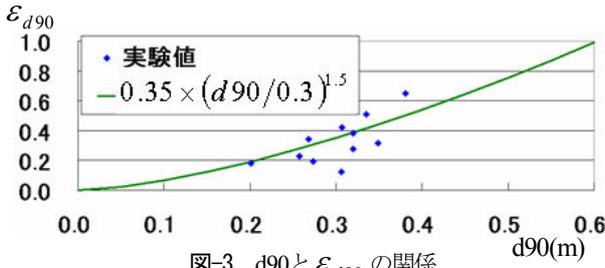
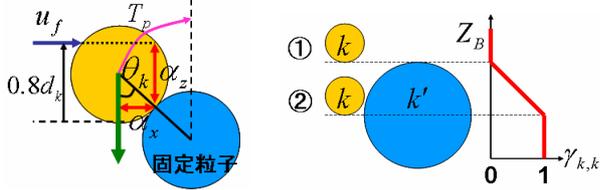


図-3 d90と ε_{d90} の関係



(a) 離脱判定と離脱時間 (b) $\gamma_{k,k'}$ の算定方法

図-4 離脱判定、離脱時間の概要と $\gamma_{k,k'}$ の算定方法

ここで、 α_2, α_3 ：粒子の2次元、3次元の形状係数、 C_D ：抗力係数であり、実際の石礫は球形ではなく歪な形状をしており、式(3)の場合、半分程度埋まっているものを対象とするため、内田・福岡ら⁷⁾により測定された水没粗度の抗力係数の値を参考に $C_D = 1.0$ とした。また、式(3)の ε_{d90} は、 $d90$ の遮蔽係数で、 $\alpha_2 d_{90}^2$ との積で流れ方向の $d90$ の投影面積となる。実験値²⁾から求めた $d90$ と ε_{d90} の関係を図-3に示す。これより、 ε_{d90} の算出式として次式を得た。

$$\varepsilon_{d90} = 0.35 \left(\frac{d_{90}}{0.3} \right)^{1.5} \quad (15)$$

また、 u_{f90} は $d90$ に掛かる流速値であり対数速度分布式により評価する。

次に、河床変動解析は、初めに式(4)に示すモーメントの釣り合い式により各粒径の離脱判定を行う。図-4(a)に離脱判定の概要を示す。離脱判定を行う粒子に対して角度 θ_k 下方に固定粒子（粒子径は $d80$ とする）を配置し、その接点を支点として、式(4)の計算を行う。ここに、 C_L ：揚力係数であり、福岡・渡邊ら⁸⁾の数値を参考に $C_L = 0.2$ とした。また、 α_x ：接点から離脱粒子の中心までのX方向長さ、 α_z ：接点から流体力作用点までのZ方向長さ、 u_f ：粒子に掛かる流速で、後述する平均河床を基準面として対数則により求める。下付きの k は粒径階を現す。流体力作用点は、図-4(a)に示すように離脱粒子の $0.8d_k$ の部分とした。角度 θ_k は、 $d80$ 粒径を用いて、以下の式で算出する。

$$\theta_k = 90.0 - 45.0 \exp \left\{ \left(\frac{Z_{Bi,k} - Z_{d80i}}{d_k} \right)^{d_{80i}} \right\} \quad (16)$$

ここに、 $Z_{Bi,k}$ ：粒径 d_k の高さ、 Z_{d80i} ： $d80$ の高さ、下付きの i は計算の格子番号である。この式は、 $d80$ と離脱粒子との高さおよび粒径比の関係で表現しており、例えば $d80$ よりも粒径が小さく、高さも低い位置に存在する場合は、 θ_k が 45 度より大きくなり、離脱しづらい条件

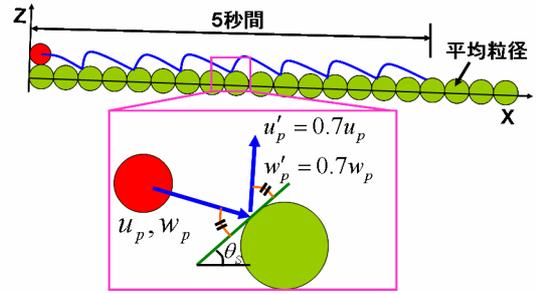


図-5 粒子の跳躍解析の概要

となる。式(16)は、大きな粒径の遮蔽効果により小さな粒径の離脱を制御するとともに、後述する離脱時間にも関係するものである。離脱に関して重要な指標であるが、十分な検証は行なっておらず、今後の検討課題である。

次に、河床安定の判定方法について説明する。式(5)が、河床安定の条件であり、左辺が流体重量の流下方向成分、右辺の F'_x は、河床に存在する $d80$ 以上の粒子において、式(4)の離脱判定により離脱しないと判断されたものからの抵抗力を表す。 $d80$ 以上の粒子が全て離脱しないと判断された場合、流体場からの抗力が全て $d80$ 以上の粒子によって受け持たれ、周囲の粒子には流体力が働かないとした。解析では、 $d80$ および $d90$ の粒子に対して離脱判定を行い、両者が離脱しない（ $d80$ 以上は安定）と判断されたとき、流体抗力が $d80$ 以上の粒子に全て受け持たれたとし、他の粒子には抗力が掛からないため、河床からの離脱量をゼロとした。

ここまでの過程を経て、離脱すると判断された粒子に対して、式(6)を用いて河床からの離脱量の計算を行う。ここに、 $V_{Pi,k}$ ：単位時間・単位面積当たりの河床からの離脱量、 $N_{Pi,k}$ ：河床に存在する各粒径の粒子数、 $T_{Pi,k}$ ：河床からの離脱時間で、粒子の運動方程式を計算し、図-4(a)に示すように固定粒子の頂点まで移動するのに要する時間とした。ところで、粒径 k が離脱判定において離脱すると判断されたとき、河床表層にある粒径 k の粒子全てが離脱することはないと考えられる。これは、大きな粒子に遮蔽されている粒子は離脱しないことや、河床の凹凸により粒径 k の全ての粒子に均等に力が働かないことなどが挙げられる。このようなことから、表層にある粒径 k の粒子全てを離脱させるのではなく、離脱粒子数を制御する必要があると考えた。式(6)の $\varepsilon_{Pi,k}$ は、粒径 d_k よりも大きな粒子による遮蔽を考慮した係数で、 $d80$ 以上の粒径に対して遮蔽効果はない（ $\varepsilon_{Pi,k} = 1.0$ ）とし、 $d80$ 以下の粒径に対して以下の式で算出した。

$$\varepsilon_{Pi,k} = 1.0 - \sum_{k'=1}^{k-1} (\gamma_{k,k'} \cdot P_{i,k'}) \quad (17)$$

$P_{i,k}$ は粒径 d_k の表層割合であり、 $\gamma_{k,k'}$ は粒子 k と粒子 k' との高さ関係から次のように定義している。図-4(b)

の①に示すように、粒子 k の底面の高さ z_k と粒子 k' の頂点の高さ $z_{k'}$ を比較して、粒子 k の底面の方が高い場合は $\gamma_{k,k'}=0$ とした。この場合、粒子 k は粒子 k' による遮蔽効果がないことを意味する。また、図-4(b)の②に示すように、粒子 k の底面の高さ z_k と粒子 k' の中心の高さ $z_{k'}$ を比較して、粒子 k の底面の方が低い場合は $\gamma_{k,k'}=1$ とした。①と②の間に粒子 k がある場合は、図-4(b)に示すように線形的に $\gamma_{k,k'}$ を与えた。また、 P_{p_i} は、流体場からその河床に掛かる力と、粒子に掛かる抗力の総和の比であり、以下の式により算出する。

$$P_{p_i} = \frac{\rho g h_i I_e}{\sum_{k=1}^n \left(\frac{N_{p_i,k}}{2} \rho C_D \alpha_2 d_k^2 u_f^2 \right)} \quad (18)$$

次に、河床への堆積量の算定方法について説明する。河床への堆積量は式(7)で算出する。ここに、 $V_{D_i,k}$ ：単位時間・単位面積あたりの河床への堆積量、 $P_{C_i,k}$ ：衝突割合（停止割合）、 $V_{S_i,k}$ ：計算格子内の流砂体積で式(8)により計算する。また、 A_i は計算格子面積（ $A_i = \Delta x_i \cdot B_i$ ）、式(8)の $u_{p_i,k}$ は粒子の流下方向速度である。河床への堆積量の計算式において重要となるのが停止割合である。本解析法では、図-5に示すように粒子の運動方程式を用いて5秒間の跳躍解析を行い、河床粒子との衝突割合を求め、それを停止割合と仮定した。実際には、広い粒径集団で構成された河床には大きな凹凸があり、その窪みや大きな材料に衝突することにより停止すると考えられるが、現段階ではそこまで考慮できていない。今後、現地データの詳細な検討によって、停止割合の評価方法の精度向上を図らなければならない。粒子速度 $u_{p_i,k}$ は、この跳躍解析による粒子の流下方向の移動距離を解析時間（5秒）で割ることにより求めた。また、流砂量は流砂量式によらず、式(9)のように、河床からの離脱量および堆積量と流砂の収支を考慮した形で評価している。

次に、各粒径の高さ（粒子の天端高さとして定義した）、表層割合と平均河床高の計算方法について説明する。各粒径の高さは、各粒径の河床からの離脱量、河床への堆積量と河床の表層割合を用いて式(10)により時々刻々の高さを計算する。また、各粒径の表層割合も式(11)、式(12)に示すように、各粒径の離脱量、堆積量を用いて計算する。ここで、 $P_{0_i,k}$ は表層下の粒径割合である。平均河床高は、流体場の計算に必要であり、その評価式は式(13)のように与えた。式(13)の右辺第1項は、計算格子内の平均粒子高さを表し、右辺第2項が平均粒径の半径である。このように、平均河床高は、平均的な粒子高さから平均粒径の半径を差し引いた高さとして定義した。

3. 2004年現地実験への適用とその検証

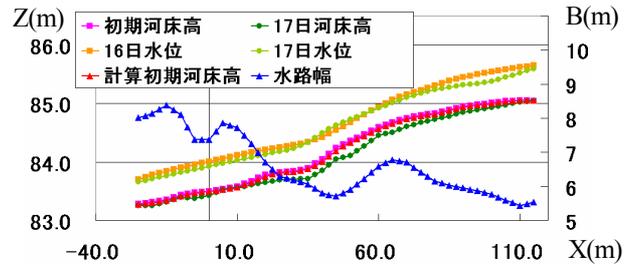


図-6 2004年現地実験の河床高、水位、水路幅の各縦断分布

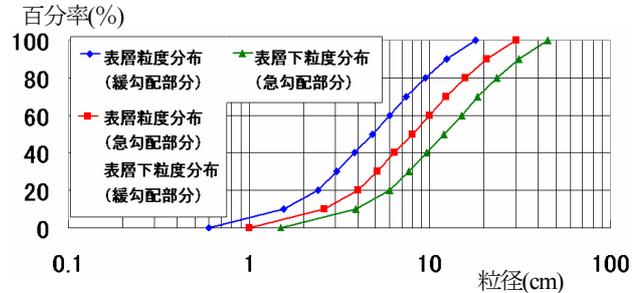


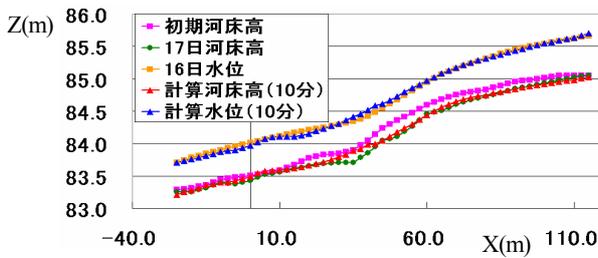
図-7 解析に与えた初期粒度分布

(1) 解析条件

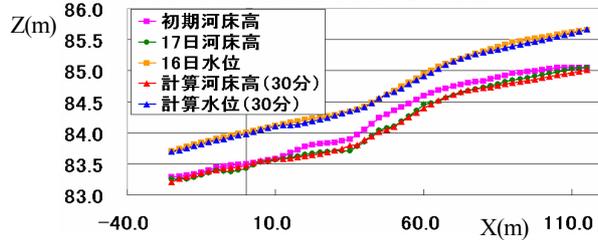
上述の河床変動解析法を2004年の常願寺川現地実験²⁾に適用する。2004年実験は、長さ約170mの直線水路に定常流を2日間通水し、水位、流量、河床高、河床表層粒度分布が測られている。図-6に、実験の河床高、水位、水路幅の各縦断分布を示す。水路中流部に急勾配部分が現れ、その区間は水路幅も狭くなっている。これは、元々この部分に、他の部分に比べて大きな河床材料が存在し、その大きな材料により水路幅が狭められていた。このことから、解析に与えた表層・表層下の初期粒度分布（図-7）は、急勾配部では緩勾配部に比べて大きな粒度分布を与えた。分布形状は、黒田・福岡ら²⁾によって求められた、無次元粒度分布をもとに作成したものである。解析に用いた粒径は7粒径で、35cm、27cm、20cm、12cm、8cm、5cm、2.5cmである。解析の初期河床高は実験の初期河床高を与え（図-6）、河床が全区間で安定するまで河床変動解析を行った。

(2) 本解析法による解析結果とその検証

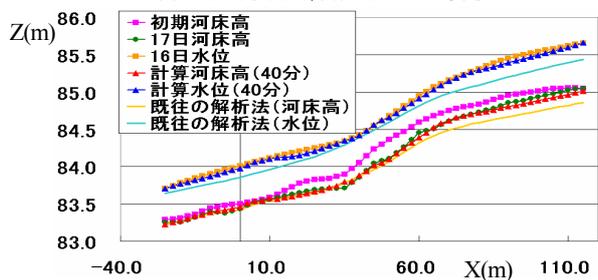
図-8には、各時刻の解析から得られた水位縦断、河床高縦断と実験値との比較を、図-9には、各時刻における流砂量を示す。実験では、通水から約24分後に静的平衡状態になった。解析では、30分後に下流区間を除いてほぼ流砂が止まり、40分後には全区間で流砂が完全に停止し、静的平衡状態となった。図-8(c)に示す40分後の水位、河床高の結果を見ると、解析水面形および河床高は実験値を精度よく再現できていることが分かる。図-8(c)には、後述する既往の解析法を用いた解析結果（5時間後）を併せて表示した。既往の解析法では、大きな粒径が動かず、小さな粒径が常に動き続けたため、河床変動が非常に遅く、5時間後においても河床が下がり続ける結果となり、水面高、河床高とも実験結果と大きく



(a) 河床変動解析開始から10分後



(b) 河床変動解析開始から30分後



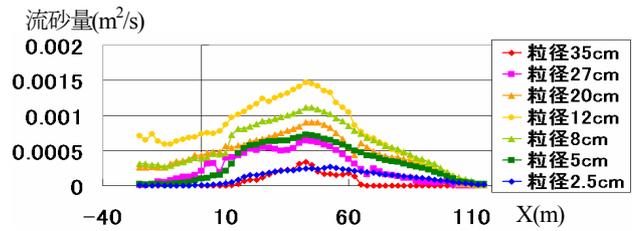
(c) 河床変動解析開始から40分後（全区間で河床安定）と既往の解析法による解析結果（5時間後）

図-8 解析水位・河床高と実験値の比較

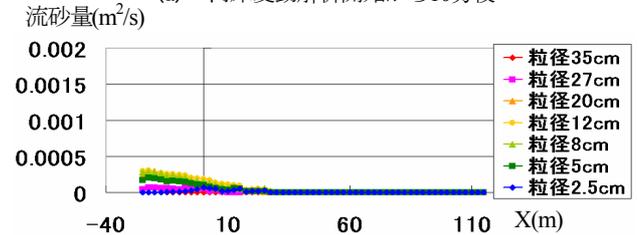
異なっている。図-9に示す各粒径の流砂量を見ると、粒径8cmや12cmなどの粗石クラスの流砂量が多いことが分かる。一方、粒径35cmや2.5cmといった巨石クラスと小さな河床材料の流砂量は少ない。巨石クラスは、離脱量が少なく、また移動速度も遅いので、流砂量が少ないと考えられる。また、2.5cmのような小さな河床材料は、大きな河床材料による遮蔽効果を考慮しているため、離脱量が抑えられ流砂量が少なくなった。図-10には、静的平衡状態になった40分後の解析から得られた各粒度（D20, D60, D80, D90）と実験値との比較を示す。上流側を除いて、各粒度とも解析値は実験値を概ね再現できていることが分かる。とくに、D80, D90の再現性がよく、これらが評価できたことにより、全区間で静的平衡状態が得られたと考えられる。以上より、本解析法は、石礫河川のような広い粒度分布で構成される河川での、水面形、河床変動量および河床粒度分布について概ね説明できることが分かった。

(3) 既往の河床変動解析法との考え方の違い

現地実験に対して既往の河床変動解析法を適用すると実際と大きく異なる。ここでは、既往の解析法と本解析法の考え方の比較を行い、既往の解析法の問題点について述べる。既往の解析法は、一般に芦田・道上式⁵⁾など流砂量式により各粒径の流砂量を計算する。芦田・道上



(a) 河床変動解析開始から10分後



(b) 河床変動解析開始から30分後

図-9 各粒径の流砂量

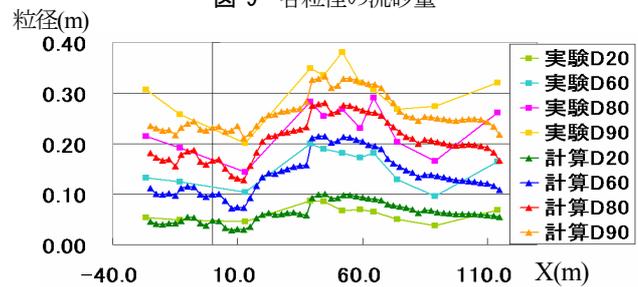


図-10 40分後の解析粒度と実験粒度の比較

は、一樣砂で求めた平衡流砂量式に各粒径が河床に占める割合と、粒径別限界掃流力を適用して、粒径別の流砂量式を導いている。しかし、図-1に示すように石礫河川では巨石が大きく露出し、それが移動しないため、各粒径の土砂移動は、芦田・道上が想定したような連続的な移動ではなく、不連続的な移動となる。本研究の解析法では、このような不連続的な移動を考慮して、流砂量および流砂体積は、式(8)、式(9)のように離脱量と堆積量から評価する形とした。また、芦田・道上が導いた粒径別流砂量式で、大切な指標である粒径別の限界掃流力は、Egiazaroff⁶⁾の理論を修正したものを用いている。Egiazaroff式は、

$$\tau_{*ck} = \frac{0.1}{\left\{ \log_{10} \left(19d_k / d_{avg} \right) \right\}^2} \quad (19)$$

であり、粒子の移動限界を滑動形式による釣り合い関係式から求められている。しかし、石礫河川における粒子の離脱形態は、図-1のように河床表層に大きな凹凸があるため、滑動形式ではなく、むしろ他粒子の乗り越えによる転動形式の方が現象を説明できると考えられる。そのような考えに基づいて、本研究では式(4)のような形で離脱判定を行っている。図-11は、図-8に示す解析のX=40m地点において河床安定となった時の、掃流力と修正Egiazaroff式による各粒径の限界掃流力を比較したものである。本解析において河床安定が得られている状態において、修正Egiazaroff式では8cm以下の粒径において掃流力が限界掃流力を上回っており、これらの粒径は移動

するという判定になっている。また、本解析の各粒径に掛かる流速値とD80、D90の移動限界流速、そしてEgiazaroffの理論から導かれる移動限界流速の比較を図-13に示した。本解析のD80の移動限界流速は、式(4)と式(18)から、

$$u_{f80c} = 3.24\sqrt{d_{80}} \quad (20)$$

となる。D90の移動限界流速は式(5)の河床安定条件より求めた。本解析法の河床安定は、D80、D90ともに離脱しないと判断された時であり、図-12の本解析法の各粒径に掛かる流速値とD80、D90の移動限界流速は、そのような関係になっている。また、Egiazaroffの理論による移動限界流速は、滑動形式による釣り合い式から、以下のようになる。

$$u_{kc} = 7.34d_k^{0.5} \quad (21)$$

Egiazaroffの移動限界流速は、粒径が大きくなるほど本解析法の移動限界流速との差が大きくなっている。

Egiazaroffの理論(式(19))は、平均粒径より大きな粒径は動きやすく、小さな粒径は動きづらいという形になっている。しかし、石礫河川のように、巨石から砂礫までが混在するような場では、巨石による遮蔽効果は、Egiazaroffが想定した以上に大きいことが分かる。

図-11には、Parker⁹⁾による基準掃流力(この掃流力以下では流砂量は非常に少ないとされる)を併せて表示した。Parkerの理論では、2.5cm以下の粒径が移動しており、現象をある程度捉えられている。しかし、既往の河床変動解析の枠組みでは後述する空隙率の問題があり、基準掃流力の考え方を組み込んでも、図-8(c)のEgiazaroffの解析結果と同様な傾向になると考えられる。

混合砂礫河床における河床の1次元連続式として、一般に平野の式⁴⁾が用いられる(河床低下の式のみ表示)。

$$\frac{\partial Z_B}{\partial t} = -\frac{1}{B(1-\lambda_0)} \frac{\partial(q_B \cdot B)}{\partial X} + \frac{a}{1-\lambda_0} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \quad (22)$$

式中には、右辺第二項に空隙率の時間変化を考慮した項が含まれている。しかし、空隙率の時間変化を計算することが困難であるため、一般的には空隙率を一定とし、右辺第二項を無視した形で解析が行われている。しかし、石礫河川では、表層の巨石等により大きな凹凸ができ、巨石の周囲には大きな空隙ができる。空隙を一定とすると、実際には低下しない巨石も周囲の砂礫の離脱とともに下がり、結果として大きな河床変動となって計算される。各粒径の高さを計算することにより、本解析法では、河床の凹凸による空隙を考慮しており、これが石礫河川の河床変動を規定する重要な機構のひとつと考える。

4. 結論と今後の課題

1) 本研究では、石礫河川における新しい1次元河床変動解析法を構築し、常願寺川現地実験の再現計算を行うことでその検証を行った。その結果、河川の河床変動を

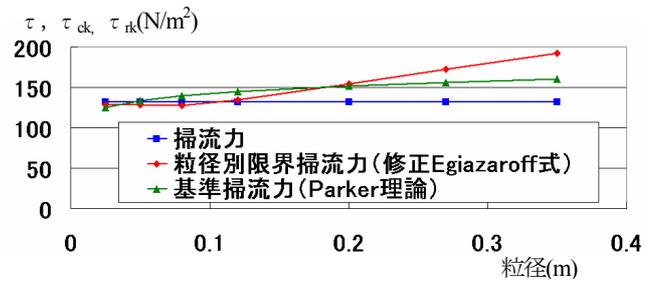


図-11 掃流力と粒径別限界掃流力の比較

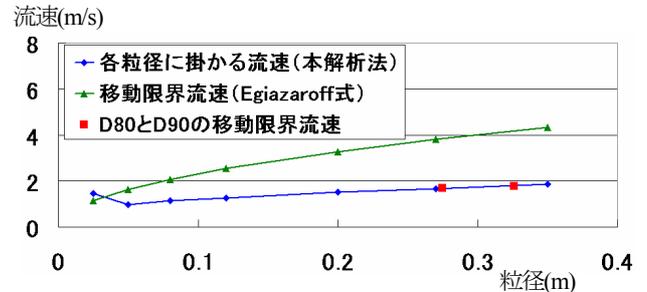


図-12 Egiazaroffと本解析法の移動限界流速の比較

規定する水面形、河床変動量、河床粒度分布の時間・空間分布の再現性は高く、既往の解析法では得られない石礫河川の河床変動機構が再現できることを示した。

2) 本解析法の重要なメカニズムである大きな粒径集団による小さな粒径集団に対する遮蔽効果は、砂礫河川に対してどの程度有効なものなのか、今後、検討を行い、その適用範囲を明らかにする必要がある。

参考文献

- 1) 例えば、Thorne,C.R.,Bathurst,J.C.,Hey,R.D.:Sediment Transport in Gravel-Bed Rivers,Wiley,1987.
- 2) 黒田勇一、福岡捷二、山本輝、吉田和弘、井内拓馬：礫床河川の湍筋形成機構と河床粒度分布特性、河川技術論文集、第11巻、pp.363-368、2005.
- 3) 福岡捷二、山崎憲人、黒田勇一、井内拓馬、渡邊明英：急流河川の河床変動機構と破堤による氾濫流量算定法の調査研究、河川技術論文集、第12巻、pp.55-60、2006.
- 4) 平野宗夫：Armoringを伴う河床低下について、土木学会論文報告集、第195号、pp.55-65、1971.
- 5) 芦田和男、道上正規：移動床流れの抵抗と掃流砂量に関する基礎的研究、土木学会論文報告集、第206号、pp.59-69、1972.
- 6) Egiazaroff, I.V.:Calculation of Nonuniform Sediment Concentration, Proc. ASCE, Vol.91, HY4, pp.225-247, 1965.
- 7) 内田龍彦、福岡捷二、福島琢二、田中正敏：大型粗度群上の浅い流れの平面二次元解析とその応用、土木学会論文集、第691号、II-57、pp.93-103、2001.
- 8) 福岡捷二、渡邊明英、篠原康寛、山下翔、斉藤一正：高速で多量に流下する礫群の運動機構と底面磨耗量の推算、河川技術論文集、第11巻、pp.291-296、2005.
- 9) Parker,G.:Surface-based Bedload Transport Relation for Gravel Rivers,Journal of Hydraulic Research,Vol.28,No.4,pp.417-436,1990 (2007. 9. 30受付)