

波状跳水・完全跳水及びその減勢区間における境界面（水面・底面）上の流れの方程式を用いた非静水圧準三次元解析（Q3D-FEBS）

竹村 吉晴¹・福岡 捷二²

¹正会員 中央大学研究開発機構准教授（〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27）

E-mail: takemura@tamacc.chuo-u.ac.jp

²フェロー 中央大学研究開発機構教授（同上）

E-mail: sfuku@tamacc.chuo-u.ac.jp

本論文は、大規模越流構造物周辺の跳水及びその減勢区間の三次元流れを効率的に検討するための解析法を構築し、その適用性を実験から確認することを目的とする。跳水形態の遷移、減勢工背後の逆流域形成は境界面（水面・底面）での逆流（剥離）をきっかけとする。これを水深積分モデルの枠組みで解析するために、境界面上の流れの方程式を用いた非静水圧準三次元解析法（Q3D-FEBS）を開発した。Q3D-FEBSを様々な条件の実験に適用し、波状跳水、完全跳水、波状跳水から完全跳水への遷移過程を解析できること、アスペクト比の小さい流れの波状跳水に対する衝撃波の発生について課題が残されていることを示した。さらに、大津新第二床固の大型水理模型実験（1/30 縮尺）を対象とし、跳水及びその減勢区間の流れに対する Q3D-FEBS の有効性を示した。

Key Words : hydraulic jump, undular jump, quasi-3D model, stiling basins, baffle blocks

1. 序論

(1) 本研究の背景と目的

我が国の河川には、古い時代に造られた堰や床固等が多くあり、老朽化や流下能力の不足等が問題になっている。河床低下の進行した河川では、河川横断構造物上下流での水位差の増大、減勢機能劣化により、水叩き・護床工の変状や局所洗掘が進行している場合が多く見られる。水面下では構造物下部地盤の空洞化も懸念される。これらは、洪水流による河川横断構造物の破壊危険性を高め、また、構造物下流の河道で滞筋の固定化・深掘れの要因にもなっている¹⁾。このような河川横断構造物の破壊危険性の評価、修繕・改修方法等の検討は喫緊の課題となっている。さらに、下流河道の流量低減に大きな効果を持つ遊水地群が、他の治水施設とともに最大限に効果を発現するための遊水地や越流堤の諸元、越流水の減勢方法等、技術的に検討すべきことは多い。近年の豪雨の頻発による流量増に対し、これら既存の治水施設を十分に活用し、河川の治水安全度を向上させることは重要な課題である²⁾。

従来、河川の大規模越流構造物の設計は、水理模型実

験を中心に検討されてきたが、計算技術と計算機性能の向上によって、水理模型実験に加え実スケールの数値解析を活用することで、大規模越流構造物の設計をより高精度かつ効率的に行えるようになって来ている^{3),4),5),6)}。

近年では、VOF (Volume of Fluid) 法⁷⁾等の界面捕獲法を用いた各種乱流モデルや粒子法により、跳水を伴う流れの三次元解析が行われるようになってきている^{8),9),10),11)}。跳水内部の詳細な乱れ構造や気泡混入特性の検討には、LESやDES等の高度な乱流モデルが用いられることもあるが、跳水の平均的な水面形状や流速分布の検討には、レイノルズ平均モデル (RANS) を用いるのが一般的である。特に、VOF法を用いた三次元RANSは、優れた商用ソフトやオープンソースの開発・普及が進んだこともあり、構造物の設計等に広く利用され始めている。例えば Valero et al.¹²⁾は、三次元RANSによる数値シミュレーションから、バツフルピア、シュートブロック等の減勢池内の付属構造物の減勢効果を分析している。一方で、跳水及びその減勢区間の流れに対する三次元RANSの適用性について詳細な実験から検証した研究は少なく、RANSではバツフルピア背後の水面形等を十分に再現できない例も報告されている¹³⁾。特に河道の洪水流のよう

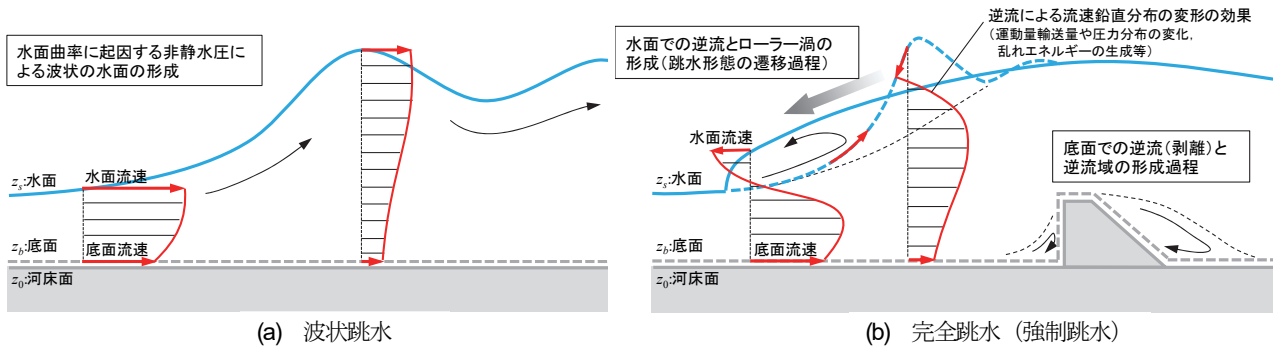


図-1 Q3D-FEBSで解析可能な水理現象

に横断構造物の存在が広い範囲の流れに影響する場合は、上下流河道の流況・河床変動等、様々な要素が跳水及びその減勢区間の流れに影響するため、実現象を三次元解析を用いて精度良く説明できるとは限らない。比較的計算負荷の小さいRANSでも、数百mの幅を持つ大規模越流構造物周辺の三次元解析には膨大な計算量が必要なことから、跳水及びその減勢区間の流れを含む、大規模越流構造物周辺の一連の三次元流れを効率的に検討する解析法が求められている。

河川の洪水流・河床変動解析では、平面二次元解析に代表される水深積分モデルを用いることが多く、実務でも広く利用されている。水深積分モデルは、鉛直方向の格子分割が不要であり、また、多くの場合、圧力に関する収束計算を必要としないため、三次元解析に比べて計算量を著しく節約できる。本論文では、跳水及びその減勢区間における一連の急変・漸変流に対する水深積分モデルの開発を目的としている。以下では、既往研究の課題と本研究の特徴について述べる。

(2) 既往研究の課題と本研究の特徴

跳水の形態は、波状の水面を伴う波状跳水(図-1(a))と水面付近で逆流域(ローラー渦)を伴う完全跳水(図-1(b))に大別できる¹⁴⁾。これまで、波状跳水及び完全跳水の水深積分モデルについて、一次元水平床流れを対象に多くの研究が行われている。Sere¹⁵⁾、Iwasa¹⁶⁾は、流速鉛直分布を一様と仮定することで、Boussinesq型方程式¹⁷⁾として知られる水面曲率による非静水圧を考慮した水深積分運動方程式を導出している。その後、Boussinesq型方程式に基づいて、波状跳水の水面形に関する理論的研究^{16), 18), 19)}、数値解析法に関する研究^{20), 21)}が行われた。また、流速鉛直分布を考慮した波状跳水の水深積分モデルには、Montes²²⁾やCastro-Orgaz et al.²³⁾の研究がある。近年、Castro-Orgaz et al.²³⁾により提案されたモデルは非静水圧の水深積分レイノルズ方程式に $k-\epsilon$ モデルを導入した高度なもので、実験水路での波状跳水の水面形と流速鉛直分布を良く説明している。

完全跳水に関しては、Narayanan²⁴⁾、McCorquodale

& Khalifa²⁵⁾は、壁面噴流の理論から跳水内部の流速鉛直分布を仮定することで、椿²⁶⁾、Madsen & Svendsen²⁷⁾は、ローラー渦を含む上層の流速分布を三次関数、下層の流速分布を一様と仮定することで、流速鉛直分布の特性量(水深、最大流速等)に関する連立方程式を誘導し、完全跳水の水面形と流速鉛直分布を調べている。また、Khan & Stetler²⁸⁾、細田・Langhi²⁹⁾は、跳水内部での流速鉛直分布の変形に伴う運動量輸送や乱流混合の効果を平均流速勾配、水面勾配を用いて表現し一次元解析法に組み込むことで、完全跳水の水面形の解析法を検討している。

一方、上述した研究のうち、跳水形態の遷移を考慮したものは細田・多田²⁰⁾のみである。細田・多田²⁰⁾は、Boussinesq型方程式の非静水圧項の大きさをフルード数の増大とともに減少させることで、跳水形態の遷移の表現を試みている。しかし、跳水形態の遷移をフルード数のみの要因にしている等、課題は多い。

ここまで見てきたように、波状跳水の解析では、非静水圧分布の評価が重要となるのに対し、完全跳水の解析では、跳水内部での流速鉛直分布の変形による運動量輸送や乱流混合の評価が重要となる。これらの現象を水深積分モデルの枠組みで統一的に解析するためには、流速や圧力の鉛直分布をできる限り一般性の高い方法でモデル化する必要がある。これには、準三次元解析法の考え方が有効である。準三次元解析法は、三次元の流れの基礎方程式系を直接解析する代わりに、水深積分して得られた流速鉛直分布に関する方程式系を解くことで、浅水流場の三次元流速分布を効率的に求める方法である。近年では、非静水圧を考慮した準三次元解析法^{30), 31), 32)}も提案されてきており、解析法の適用範囲が拡大してきている。

内田・福岡により開発されたGBVC法³²⁾は、水深積分の連続式と運動方程式に加え、水深積分温度方程式、水面上の運動方程式、底面圧力の方程式等を解くことで、非静水圧を考慮した三次元流速場を解析する点に特徴がある。GBVC法は、構造物を越流する急変流やその下流で生じる跳水を含め³³⁾、河川の多くの問題に適用され、

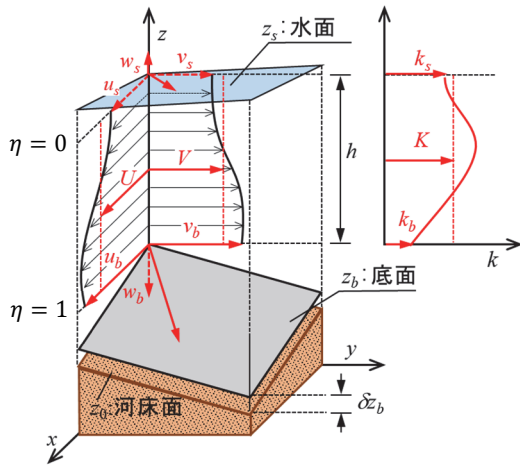


図-2 水平方向流速と乱れエネルギーの鉛直分布

解析法の有効性が示されている。

著者らは、信濃川大河津分水路に建設予定の新第二床固の大型水理模型実験を対象として、GBVC法を拡張し、跳水及びその減勢区間における非静水圧準三次元解析法(GBVC-FSV法)について検討してきた⁵⁾⁶⁾。通常の水深積分モデルでは、減勢工を包括するように計算格子を設定し、減勢工の体積割合を考慮するとともに、運動方程式に抗力項を加えることで減勢工の存在や流体力が考慮されることが多い。しかし、抗力係数の大きさは粗度の配置等により変化することが知られており³⁴⁾、様々な条件に対応するのは難しい。著者らは、非静水圧を含む底面圧力が計算できるGBVC法に着目し、減勢工の形状を地盤高として解析に取り込み、減勢工周辺の三次元流れを解くことで任意の形状や配置を有する減勢工の流体力を評価してきた⁵⁾⁶⁾。また、内田³⁵⁾は、GBVC法に非平衡粗面抵抗則を導入したGBVC4-DWL法³⁶⁾を段落ち下流粗面上の跳水を伴う流れに適用し、下流水深による波状跳水から完全跳水への遷移の解析を試みている。このように、GBVC法系統の解析法を用いることで、跳水形態の遷移や減勢工の効果を考慮した解析が可能になりつつある。

一方で、基本的な跳水現象(水平床上の完全跳水等)に対する解析法の適用性は十分に検討されていない。これに加え、GBVC法系統の解析法では、跳水形態の遷移や減勢工背後の逆流域を解析するために、剥離モデルの導入が必要であり^{5), 6), 33), 35)}、解析法の汎用性には課題が残されている。具体的に、GBVC法系統の解析法では、水面勾配及び河床勾配が碎波(剥離)限界角度を超えた場合に、その下流計算点において次のことを考慮している。1)水面上の運動方程式の移流項の計算では、上流からの移流がないものとする。2)水深積分渦度の計算では、乱流拡散による渦度供給に加え、水面からの剥離渦を供給する。3)減勢工等の段落ち背後の計算点では、仮想的に河床面を設定

し、底面からの剥離渦を供給する。解析においてこのような剥離モデルの導入が必要な理由は明らかでないが、水面や底面形状の変化が大きい区間では、水深積分渦度方程式の物理性や解析精度に課題があるものと考えている。

跳水形態の遷移、減勢工背後での逆流域形成は、いずれも水面・底面での逆流(剥離)がきっかけになると考えられる。このため、跳水及びその減勢区間の流れのように、水面・底面形状の変化が大きい場合には、水深積分渦度方程式を用いるよりも、複雑な境界面(水面・底面)上の流れの方程式を用いて、逆流の発生とこれに伴う流速鉛直分布の変形を解析し、三次元的な運動量輸送や圧力分布の変化、乱れエネルギーの生成等を考慮した解析の方が良い。これにより、跳水形態の遷移過程及び減勢工背後での逆流域形成過程の解析が可能になり、跳水及びその減勢区間における汎用性の高い準三次元解析法が構築できることになる。

このような考えから、本論文では、境界面上の流れの方程式を用いた新しい非静水圧準三次元解析法(Q3D-FEBS: Quasi-3D model considering Flow Equations on Boundary Surfaces)を構築する。次章では、Q3D-FEBSの解析法的具体な定式化を行い、3章では、Q3D-FEBSを様々な条件で行われた跳水の実験結果に適用し、波状跳水、完全跳水、さらに波状跳水から完全跳水への遷移過程の解析を行う。4章では、大河津新第二床固の大型水理模型実験を対象に、跳水及びその減勢区間における一連の流れへのQ3D-FEBSの適用性、有効性を検討する。

2. 境界面(水面・底面)上の流れの方程式を用いた非静水圧準三次元解析法(Q3D-FEBS)

(1) Q3D-FEBSの基礎方程式系の導出

本研究では、複雑な水面・底面形状を流れの解析に適切に取り込むため、以下に示す座標系を用いて基礎方程式を記述する。

$$t^* = t, \quad x_i^* = x_i, \quad \eta = \frac{z_s - z}{h} \quad (1)$$

ここで、 $i, j = 1, 2$ ($x_1 = x, x_2 = y$)、水面 $z = z_s$ 、 h :水深($= z_s - z_b$)であり、 t, x, y, z はデカルト座標系の独立変数である。図-2に示す河床面 z_0 より僅かに上の面を底面 z_b と定義しており、 η は水面 $z = z_s$ で0、底面 $z = z_b$ で1となる関数である。任意の変数 ϕ の偏微分は、チェーンルールを用いて以下のように変換される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t^*} + \left(\frac{\partial z_s}{\partial t^*} - \eta \frac{\partial h}{\partial t^*} \right) \frac{1}{h} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \quad (2a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i^*} + \left(\frac{\partial z_s}{\partial x_i^*} - \eta \frac{\partial h}{\partial x_i^*} \right) \frac{1}{h} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \quad (2b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{1}{h} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \quad (2c)$$

式(2)を用いて、デカルト座標系のレイノルズ平均の連続式と運動方程式を (t^*, x^*, y^*, η) 座標系に書き直すと次式となる。

$$\frac{\partial u_i h}{\partial x_i^*} + h \frac{\partial w_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial h}{\partial t^*} = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t^*} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j^*} + w_\eta \frac{\partial u_i}{\partial \eta} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i^*} - \left(\frac{\partial z_s}{\partial x_i^*} - \eta \frac{\partial h}{\partial x_i^*} \right) \frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial \eta} \\ & + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j^*} + \left(\frac{\partial z_s}{\partial x_j^*} - \eta \frac{\partial h}{\partial x_j^*} \right) \frac{1}{\rho h} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial \eta} - \frac{1}{\rho h} \frac{\partial \tau_{zi}}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t^*} + u_i \frac{\partial w}{\partial x_i^*} + w_\eta \frac{\partial w}{\partial \eta} = & -g + \frac{1}{\rho h} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{zi}}{\partial x_i^*} \\ & + \left(\frac{\partial z_s}{\partial x_i^*} - \eta \frac{\partial h}{\partial x_i^*} \right) \frac{1}{\rho h} \frac{\partial \tau_{zi}}{\partial \eta} - \frac{1}{\rho h} \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (5)$$

$$w_\eta = \frac{1}{h} \left[\left(\frac{\partial z_s}{\partial t^*} - \eta \frac{\partial h}{\partial t^*} \right) + u_i \left(\frac{\partial z_s}{\partial x_i^*} - \eta \frac{\partial h}{\partial x_i^*} \right) - w \right] \quad (6)$$

ここに、 u_i : x_i 方向の流速、 w : z 方向の流速、 p : 圧力、 ρ : 水の密度、 g : 重力加速度、 τ : レイノルズ応力である。レイノルズ応力はブシネスク近似を用いて次のように表される。

$$\tau_{ij} = \rho \nu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j^*} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i^*} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (7a)$$

$$\tau_{zi} = \rho \nu_t \left(-\frac{1}{h} \frac{\partial u_i}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial x_i^*} \right) \quad (7b)$$

$$\tau_{zz} = -2\rho \nu_t \frac{1}{h} \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{2}{3} \rho k \quad (7c)$$

ここに、 ν_t : 渦動粘性係数、 k : 乱れエネルギー、 $\delta_{ij} = \{1 (i=j), 0 (i \neq j)\}$ である。跳水現象の解析では乱流モデルに $k-\varepsilon$ モデルを用いることが多い。しかし、ここでは解析法の簡潔さを優先し、乱れエネルギーの輸送方程式を用いた一方程式モデルを採用する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t^*} + u_i \frac{\partial k}{\partial x_i^*} + w_\eta \frac{\partial k}{\partial \eta} = & -\frac{\partial F_{ki}}{\partial x_i^*} - \left(\frac{\partial z_s}{\partial x_i^*} - \eta \frac{\partial h}{\partial x_i^*} \right) \frac{1}{h} \frac{\partial F_{ki}}{\partial \eta} \\ & + \frac{1}{h} \frac{\partial F_{kz}}{\partial \eta} + p_k - c_d \frac{k^{3/2}}{l_d} \end{aligned} \quad (8)$$

$$p_k = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j^*} + \tau_{zi} \left(\frac{\partial w}{\partial x_i^*} - \frac{1}{h} \frac{\partial u_i}{\partial \eta} \right) - \frac{\tau_{zz}}{h} \frac{\partial w}{\partial \eta} \quad (9)$$

$$F_{ki} = -\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i^*}, \quad F_{kz} = \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{1}{h} \frac{\partial k}{\partial \eta} \quad (10)$$

$$\nu_t = l_d \sqrt{k} \quad (11)$$

ここに、 F_{ki} 、 F_{kz} : 乱流による乱れエネルギーの x_i 方向及び z 方向フラックス、 p_k : 乱れエネルギーの生産率である。式(8)のモデル定数はDeigaard et al.³⁷⁾を参考に $\sigma_k=1.0$ 、 $c_d=0.08$ 、 $l_d=c_l h$ 、 $c_l=0.07$ とした。なお、式(7)、式(9)、

式(10)では座標変換に伴う高次項を省略している。

a) 水平方向流速と乱れエネルギーの鉛直分布

跳水内部の流速鉛直分布は三次多項式で概ね近似できることから^{26), 27)}、本研究では、GBVC法³²⁾と同様に水平方向流速の鉛直分布を式(12)で近似する。

$$\begin{aligned} u_i = & \Delta u_i (12\eta^3 - 12\eta^2 + 1) \\ & + \delta u_i (-4\eta^3 + 3\eta^2) + U_i \end{aligned} \quad (12)$$

ここに、 $\Delta u_i = u_{si} - U_i$ 、 $\delta u_i = u_{si} - u_{bi}$ 、 U_i : x_i 方向の水深平均流速、 u_{si} : x_i 方向の水面流速、 u_{bi} : x_i 方向の底面流速である。添え字の"s"と"b"は、水面 $z=z_s(\eta=0)$ と底面 $z=z_b(\eta=1)$ での値をそれぞれ表し、式(12)は以下の条件を満たす。

$$u_i = u_{si}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial \eta} = 0 \quad \text{at} \quad \eta = 0 \quad (13a)$$

$$u_i = u_{bi} \quad \text{at} \quad \eta = 1 \quad (13b)$$

$$\int_0^1 u_i d\eta = U_i \quad (13c)$$

河川や沿岸域等の浅水乱流場の平面二次元解析や準三次元解析では、乱れエネルギーの鉛直分布を無視することが多い^{38), 39)}。しかし、完全跳水のような極めて乱れ構造の複雑な現象に対しては、乱れエネルギーの鉛直分布を無視できないものと考えられる。完全跳水の乱れエネルギーは、ローラー渦による逆流域と主流部の境界付近で最大となり、水面と底面に向かい減少する特徴を持つことから、この特徴を表せる単純な関数として、水平方向流速と同様に三次多項式で乱れエネルギーの鉛直分布を近似する。

$$\begin{aligned} k = & \Delta k (12\eta^3 - 12\eta^2 + 1) \\ & + \delta k (-4\eta^3 + 3\eta^2) + K \end{aligned} \quad (14)$$

ここに、 $\Delta k = k_s - K$ 、 $\delta k = k_s - k_b$ 、 K : 水深平均の乱れエネルギー、 k_s : 水面の乱れエネルギー、 k_b : 底面の乱れエネルギーである。式(14)は以下の条件を満たす。

$$k = k_s, \quad \frac{\partial k}{\partial \eta} = 0 \quad \text{at} \quad \eta = 0 \quad (15a)$$

$$k = k_b \quad \text{at} \quad \eta = 1 \quad (15b)$$

$$\int_0^1 k d\eta = K \quad (15c)$$

次に、式(12)、式(14)の未知量である水深平均流(h, U_i, K)及び境界面(水面・底面)上の流れ(u_{si}, u_{bi}, k_s, k_b)の方程式系を導出する。

b) 水深平均流の方程式系

水平方向流速と非静水圧の鉛直分布を考慮するために、水平方向流速を水深平均値と水深平均値からの偏差成分 u'_i の和($u_i = U_i + u'_i$)、圧力を静水圧と非静水圧 p' の和($p = \rho g h \eta + p'$)でそれぞれ表し、式(3)、式(4)に示した

連続式と水平方向の運動方程式を水面・底面の運動学的境界条件

$$w_s = \frac{\partial z_s}{\partial t^*} + u_{si} \frac{\partial z_s}{\partial x_i^*}, \quad w_b = \frac{\partial z_b}{\partial t^*} + u_{bi} \frac{\partial z_b}{\partial x_i^*} \quad (16)$$

のもと水深積分する。ここで、 w_s : z 方向の水面流速、 w_b : z 方向の底面流速である。単位水平面積当たり水面及び底面に作用する x_i 方向のせん断力を

$$\hat{S}\hat{\tau}_{si} = \tau_{zi}|_s - \frac{\partial z_s}{\partial x_j^*} \tau_{ij}|_s, \quad \hat{S}\hat{\tau}_{bi} = \tau_{zi}|_b - \frac{\partial z_b}{\partial x_j^*} \tau_{ij}|_b \quad (17)$$

$$\hat{S} = \sqrt{1 + (\partial z_s / \partial x_i^*)^2}, \quad \hat{S} = \sqrt{1 + (\partial z_b / \partial x_i^*)^2} \quad (18)$$

のように表せば、以下に示す水深積分の連続式と運動方程式を得る。

$$\frac{\partial h}{\partial t^*} + \frac{\partial U_i h}{\partial x_i^*} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial U_i h}{\partial t^*} + \frac{\partial U_j U_i h}{\partial x_j^*} = -gh \frac{\partial z_s}{\partial x_i^*} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial h p'}{\partial x_i^*} - \frac{p'_b \partial z_b}{\rho \partial x_i^*} - \frac{\partial \overline{hu'_i u'_j}}{\partial x_j^*} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial h \overline{\tau_{ij}}}{\partial x_j^*} - \hat{S} \frac{\hat{\tau}_{bi}}{\rho} \quad (20)$$

$$\overline{\tau_{ij}} = \rho \overline{v_t} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j^*} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i^*} \right) - \frac{2}{3} \rho \delta_{ij} K, \quad \overline{v_t} = l_d \sqrt{K} \quad (21)$$

ここに、 u'_i : x_i 方向流速の水深平均値からの偏差成分、 p' : 圧力の非静水圧成分、 $\hat{\tau}_{si}$: x_i 方向の水面せん断応力、 $\hat{\tau}_{bi}$: x_i 方向の底面せん断応力であり、“-”は水深平均値を表す。なお、 $\hat{\tau}_{si}$ はゼロとしている。式(20)の水深積分の運動方程式は、右辺第二項、第三項で非静水圧、右辺第四項で流速鉛直分布による運動量輸送が考慮される点が通常の平面二次元解析法と異なる。流速鉛直分布による運動量輸送量の水深平均値は、式(12)から式(22)のように求められる。

$$\overline{u'_i u'_j} = \frac{13}{35} \Delta u_i \Delta u_j - \frac{2}{35} (\Delta u_i \delta u_j + \delta u_i \Delta u_j) + \frac{3}{35} \delta u_i \delta u_j \quad (22)$$

次に、圧力の鉛直分布について考える。式(5)の鉛直方向の運動方程式を水面 $\eta=0$ から任意の高さ η まで積分する。その後、式(16)の水面の運動学的境界条件、水面で圧力とせん断力ゼロの条件を課せば非静水圧の鉛直分布を次のように表せる。

$$\frac{p'}{\rho} = \frac{\partial}{\partial t^*} \left(h \int_0^\eta w d\eta \right) + \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(h \int_0^\eta u_i w d\eta \right) + h w w_\eta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(h \int_0^\eta \tau_{zi} d\eta \right) - \frac{\tau_{zi}}{\rho} \left(\frac{\partial z_s}{\partial x_i^*} - \eta \frac{\partial h}{\partial x_i^*} \right) + \frac{\tau_{zz}}{\rho} \quad (23)$$

同様に式(3)の連続式を水面 $\eta=0$ から任意の高さ η まで積

分することで、鉛直方向流速を次のように表せる。

$$w = \frac{\partial z_s}{\partial t^*} + u_i \left(\frac{\partial z_s}{\partial x_i^*} - \eta \frac{\partial h}{\partial x_i^*} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(h \int_0^\eta u_i d\eta \right) \quad (24)$$

式(23)に式(12)、式(24)を代入すれば、非静水圧の鉛直分布が求められるが、計算の安定性を考え、非静水圧については主要な部分のみを考慮し以下のように表す。

水平方向流速を一様($u_i=U_i$)かつ定常流を仮定すれば式(23)、式(24)は式(25)、式(26)のようになる。

$$\frac{p'}{\rho} = h U_i \frac{\partial}{\partial x_i^*} \int_0^\eta w d\eta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(h \int_0^\eta \tau_{iz} d\eta \right) - \frac{\tau_{iz}}{\rho} \left(\frac{\partial z_s}{\partial x_i^*} - \eta \frac{\partial h}{\partial x_i^*} \right) + \frac{\tau_{zz}}{\rho} \quad (25)$$

$$w = U_i \left(\frac{\partial z_s}{\partial x_i^*} - \eta \frac{\partial h}{\partial x_i^*} \right) \quad (26)$$

この場合、式(26)に示す鉛直方向流速は直線分布になる。これを式(25)に代入し、レイノルズ応力項を無視すれば Boussinesq 型方程式の圧力分布(放物線分布)が得られる¹⁷⁾。このような仮定は、波状跳水の解析に有効なことが示されている^{20),21)}。一方、式(26)では、鉛直方向流速の計算に水平方向流速の鉛直分布が考慮されない。このため、フルード数の増大によって水面で逆流(剥離)が生じ、流速鉛直分布が大きく変形することで、圧力分布が変化する機構を考慮できず、碎波に伴う波状跳水から完全跳水への遷移を説明できない。本研究では、式(26)の代わりに、式(27)で鉛直方向流速の直線分布を表現することで、式(25)の非静水圧分布に水平方向流速の鉛直分布を考慮することにした。

$$w = W + \frac{\delta w}{2} (1 - 2\eta) \quad (27)$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{\partial (z_s + z_b)}{\partial t^*} + \frac{1}{2} U_i \frac{\partial (z_s + z_b)}{\partial x_i^*} + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x_i^*} h^2 \left(\frac{\delta u_i}{20} + \frac{\Delta u_i}{10} \right) \quad (28)$$

ここで、 W : 水深平均の鉛直方向流速、 $\delta w = w_s - w_b$ である。水面・底面での鉛直方向流速 w_s 、 w_b は、式(16)の運動学的境界条件から与える。式(28)の水深平均の鉛直方向流速 W は、式(24)に式(12)を代入し水深積分することで得られる。式(27)は鉛直方向流速を直線分布と置いたものであるが、式中に表れる W 及び δw には、水平方向流速の鉛直分布や水面流速、底面流速が考慮されている。これにより、流速鉛直分布の変形に伴う圧力分布の変化を考慮することができる。

式(25)に式(27)を代入し、右辺第二項の水平方向のレイノルズ応力項を無視し、右辺第三項以下のレイノルズ応力項を底面せん断応力を用いて

$$-\frac{\tau_{iz}}{\rho} \left(\frac{\partial z_s}{\partial x_i^*} - \eta \frac{\partial h}{\partial x_i^*} \right) + \frac{\tau_{zz}}{\rho} = \eta \hat{S} \frac{\hat{t}_{bz}}{\rho} \quad (29)$$

のように表すことにより, 式(30)に示す非静水圧の鉛直分布式が得られる. ここで, \hat{t}_{bz} : z 方向の底面せん断応力である.

$$\frac{p'}{\rho} = \eta h U_i \frac{\partial W}{\partial x_i^*} + (\eta - \eta^2) \frac{U_i h}{2} \frac{\partial \delta w}{\partial x_i^*} + \eta \hat{S} \frac{\hat{t}_{bz}}{\rho} \quad (30)$$

式(30)から, 底面での非静水圧, 水深平均の非静水圧がそれぞれ式(31), 式(32)のように得られる.

$$\frac{p'_b}{\rho} = U_i h \frac{\partial W}{\partial x_i^*} + \hat{S} \frac{\hat{t}_{bz}}{\rho} \quad (31)$$

$$\frac{\overline{p'}}{\rho} = \frac{1}{2} \frac{p'_b}{\rho} + \frac{U_i h}{12} \frac{\partial \delta w}{\partial x_i^*} \quad (32)$$

式(31)には底面せん断力が含まれており, 等流状態に p'_b はゼロとならない. これは, 付録1に示すように, 本研究では鉛直方向に静水圧を仮定するため, 斜面上の静水圧 $\rho g h \cos^2 \theta$ との差分が p'_b として表現されるためである.

水深平均の乱れエネルギーは, 水平方向流速及び乱れエネルギーを水深平均値と水深平均値からの偏差成分 u'_i , k' の和 ($u_i = U_i + u'_i$, $k = K + k'$) でそれぞれ表し, 式(8)を水深積分した次式より求める.

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial t^*} + U_i \frac{\partial K}{\partial x_i^*} &= -\frac{1}{h} \frac{\partial \overline{h u'_i k'}}{\partial x_i^*} + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x_i^*} \frac{h \overline{v_t} \partial K}{\sigma_k} \\ &+ \frac{v_{tb}}{\sigma_k h^2} \frac{\partial k}{\partial \eta} \Big|_b + \overline{P_k} - c_d \frac{K^{3/2}}{l_d} \end{aligned} \quad (33)$$

ここに, k' : 乱れエネルギーの水深平均値からの偏差成分, $\overline{P_k}$: 水深平均の乱れエネルギーの生産率である. 式(8)の水深積分においては, 水面からの乱れエネルギーのフラックスをゼロ, 底面からの乱れエネルギーのフラックスを次のように与えている.

$$-F_{ki} \Big|_b \frac{\partial z_b}{\partial x_i^*} + F_{kz} \Big|_b \cong \frac{v_{tb}}{\sigma_k h} \frac{\partial k}{\partial \eta} \Big|_b \quad (34)$$

式(14)より $\partial k / \partial \eta \Big|_b = 12 \Delta k - 6 \delta k$ である.

式(33)の右辺第一項は, 流速鉛直分布による乱れエネルギーの輸送項であり式(12), 式(14)から

$$\begin{aligned} \overline{u'_i k'} &= \frac{13}{35} \Delta u_i \Delta k - \frac{2}{35} (\Delta u_i \delta k + \Delta k \delta u_i) \\ &+ \frac{3}{35} \delta u_i \delta k \end{aligned} \quad (35)$$

のようになる. 式(33)の右辺第二項の水平方向の乱流拡散, 第五項の逸散率は水深平均の乱れエネルギーを用いて評価する. 水深平均の乱れエネルギーの生産率は, 式(9)を水深積分することで定式化できる. 式(9)の右辺第一項は水平方向のレイノルズ応力による乱れの生産を表

し, 本研究では式(20)の運動方程式との整合をとり, 水深平均のレイノルズ応力による乱れエネルギーの生産のみを考慮する. 式(9)の右辺第二項, 第三項の鉛直方向流速を無視し, 渦動粘性係数を鉛直方向に一定と仮定し, レイノルズ応力の等方成分が乱れエネルギーの生産に影響しないことを考慮すれば, 水深平均の乱れエネルギーの生産率は次式のようになる.

$$\overline{P_k} = \overline{v_t} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j^*} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i^*} \right)^2 + \frac{1}{h^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial \eta} \right)^2 d\eta \right] \quad (36)$$

完全跳水で形成されるローラー渦や減勢工背後の逆流域での乱れエネルギーの生産は, 流速鉛直分布の影響を表す式(36)の右辺第二項で考慮される. 本研究では, 式(36)の $\partial u_i / \partial \eta$ を式(12)から与え, 水深平均の乱れエネルギーの生産率を次式で評価する.

$$\begin{aligned} \overline{P_k} &= c_h \overline{v_t} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j^*} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i^*} \right)^2 \right. \\ &\left. + \frac{12}{5 h^2} (2 \Delta u_i^2 - 7 \delta u_i \Delta u_i + 8 \delta u_i^2) \right] \end{aligned} \quad (37)$$

ここで, c_h は乱れエネルギーの生産率と逸散率のバランスを調節するために導入した定数であり, 3章の既往実験の再現計算等から $c_h = 0.5$ と定めた.

なお, 式(16)の底面の運動学的境界条件は, 底面を横切るフラックスがある場合, $\eta = 1$ で $w_\eta = 0$ とならない. これを求めるには底面 z_b より下層の流れを解く必要がある³⁰. 固定床ではこの影響は小さいと考え, 本論文では底面を横切るフラックスはないものとしている.

c) 境界面 (水面・底面) 上の流れの方程式系

境界面 (水面・底面) 上の水平方向の運動方程式は, 式(4)に $\eta = 0, \eta = 1$ をそれぞれ代入すれば導くことができる. 圧力を静水圧と非静水圧の和 $p = \rho g \eta + p'$ で表し, 式(16)の運動学的境界条件, 水面で圧力とレイノルズ応力をゼロとすれば次式となる.

$$\frac{\partial u_{si}}{\partial t^*} + u_{sj} \frac{\partial u_{si}}{\partial x_j^*} = -g \frac{\partial z_s}{\partial x_i^*} - \frac{1}{\rho h} \frac{\partial p'}{\partial \eta} \Big|_s \frac{\partial z_s}{\partial x_i^*} - \frac{\hat{S}}{\rho h} \frac{\partial \hat{\tau}_i}{\partial \eta} \Big|_s \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{bi}}{\partial t^*} + u_{bj} \frac{\partial u_{bi}}{\partial x_j^*} &= -g \frac{\partial z_s}{\partial x_i^*} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'_b}{\partial x_i^*} \\ &- \frac{1}{\rho h} \frac{\partial p'}{\partial \eta} \Big|_b \frac{\partial z_b}{\partial x_i^*} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j^*} \Big|_b - \frac{\hat{S}}{\rho h} \frac{\partial \hat{\tau}_i}{\partial \eta} \Big|_b \end{aligned} \quad (39)$$

$$\tau_{ij} \Big|_b = \rho \overline{v_t} \left(\frac{\partial u_{bi}}{\partial x_j^*} + \frac{\partial u_{bj}}{\partial x_i^*} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k_b \quad (40)$$

$\hat{\tau}_i (= (\tau_{zi} - \tau_{ij} \partial z_s / \partial x_j^*) / \hat{S})$: 水面に平行な面に作用する x_i 方向のレイノルズ応力, $\hat{t}_i (= (\tau_{zi} - \tau_{ij} \partial z_b / \partial x_j^*) / \hat{S})$: 底面に平行な面に作用する x_i 方向のレイノルズ応力, で

ある。式(39)に示した底面上の運動方程式は、底面での非静水圧とレイノルズ応力はゼロでないため、式(38)に示した水面上の運動方程式に比べ項が多くなっている。式(40)では、渦動粘性係数に水深平均値を用いる。これは、後述する底面での渦動粘性係数を用いた場合、底面流速の水平混合が小さく計算される傾向にあったためである。式(38)、式(39)の水面と底面上の運動方程式に含まれる $\partial p'/\partial \eta|_s$ 、 $\partial p'/\partial \eta|_b$ は、式(5)に $\eta=0, \eta=1$ をそれぞれ代入し、非定常項とレイノルズ応力項を無視した次式で評価する。

$$\frac{1}{\rho h} \frac{\partial p'}{\partial \eta} \Big|_s = u_{si} \frac{\partial w_s}{\partial x_i^*}, \quad \frac{1}{\rho h} \frac{\partial p'}{\partial \eta} \Big|_b = u_{bi} \frac{\partial w_b}{\partial x_i^*} \quad (41)$$

ここで、水面下で大気圧以下の圧力は生じないものと考え⁴⁰⁾、 $-\partial p'/\rho h \partial \eta|_s (= \partial p'/\rho \partial z|_s)$ は g を上限值とする。

式(38)の抵抗項（最終項）は、以下のように近似する。

$$-\frac{\tilde{S}}{\rho h} \frac{\partial \tilde{\tau}_i}{\partial \eta} \Big|_s \cong \tilde{S} \frac{v_{ts}}{h^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \eta^2} \Big|_s, \quad v_{ts} = l_d \sqrt{k_s} \quad (42)$$

ここで、式(12)より $\partial^2 u_i/\partial \eta^2|_s = 24\Delta u_i - 6\delta u_i$ である。

水面上の乱れエネルギーの輸送方程式は、式(8)に $\eta=0$ を代入することで、式(43)のように得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_s}{\partial t^*} + u_{si} \frac{\partial k_s}{\partial x_i^*} &= \frac{\partial}{\partial x_i^*} \frac{v_{ts}}{\sigma_k} \frac{\partial k_s}{\partial x_i^*} \\ &+ \tilde{S} \frac{v_{ts}}{\sigma_k h^2} \frac{\partial^2 k}{\partial \eta^2} \Big|_s - c_d \frac{k_s^{3/2}}{l_d} \end{aligned} \quad (43)$$

ここで、式(14)より $\partial^2 k/\partial \eta^2|_s = 24\Delta k - 6\delta k$ である。水面では応力ゼロを仮定するため、乱れエネルギーの生産はなく、左辺第二項の乱流拡散によって内部の流れから水面に乱れエネルギーが供給される。

式(39)の抵抗項は、図-2 に示した底面 z_b と河床面 z_0 のせん断応力の差をとり次のように近似する。

$$-\frac{\tilde{S}}{\rho h} \frac{\partial \tilde{\tau}_i}{\partial \eta} \Big|_b \cong \frac{\hat{S}}{\rho} \frac{\hat{\tau}_{bi} - \hat{\tau}_{oi}}{\delta z_b} \quad (44)$$

ここで、 $\hat{\tau}_{oi}$: x_i 方向の河床面のせん断応力であり、 $\delta z_b (= c_{zb} h)$ は底面と河床面の距離である。 x_i 方向の底面せん断応力は次式で評価する。

$$\frac{\hat{\tau}_{bi}}{\rho} \cong -\frac{v_{tb}}{h} \frac{\partial u_i}{\partial \eta} \Big|_b, \quad v_{tb} = l_d \sqrt{k_b} \quad (45)$$

ここで、式(12)より $\partial u_i/\partial \eta|_b = 12\Delta u_i - 6\delta u_i$ である。

d) 底面の境界条件

上述した Q3D-FEBS の方程式系を閉じるには、底面で境界条件を与える必要がある。 x_i 方向の河床面のせん断応力は、立山ら⁴⁰⁾を参考に底面に沿う流速を考慮した次式で与える。

$$\hat{\tau}_{oi} = \rho c_b^2 u_{bi} |u_b| \quad (46)$$

ここで、 $u_b = (u_b, v_b, w_b)$: 底面に沿う流速ベクトル、 u_b, v_b, w_b : x, y, z 方向の底面流速である。本研究では、等流状態の流速鉛直分布を仮定することで式(46)の c_b 及び底面の乱れエネルギー k_b を以下のように与える。

渦動粘性係数を $\alpha \sqrt{\hat{\tau}_b/\rho h}$ ($\alpha = \kappa/6, \kappa = 0.41$) で鉛直方向に一樣とし、等流状態の流速鉛直分布を導けば次式のようになる^{39),42)}。

$$\frac{u - U}{\sqrt{\hat{\tau}_b/\rho}} = \frac{1}{\kappa} (1 - 3\eta^2), \quad \hat{\tau}_b = \frac{\hat{\tau}_0}{1 + c_{zb}} \quad (47)$$

式(46)から c_b とマンシングの粗度係数 n の関係を導くと、

$$c_b = \frac{C_0}{1 - 2C_0/\kappa} \sqrt{1 + c_{zb}}, \quad C_0 = \sqrt{\frac{gn^2}{h^{1/3}}} \quad (48)$$

のようになる。また、式(45)に示した $v_{tb} = l_d \sqrt{k_b}$ の関係から、等流状態における底面の乱れエネルギーと摩擦速度 $u_* (= \sqrt{\hat{\tau}_0/\rho})$ を関係づけると式(49)になる。

$$k_b = \left(\frac{\alpha}{c_l}\right)^2 \frac{u_*^2}{1 + c_{zb}} \quad (49)$$

式(48)、式(49)が常に成り立つものとし、底面の乱れエネルギー及び河床面のせん断応力を評価する。式(31)に含まれる z 方向の底面せん断応力は、等流状態における底面と河床面のせん断応力の関係から次式で与える。

$$\hat{\tau}_{bz} = \rho c_b^2 w_b |u_b| / (1 + c_{zb}) \quad (50)$$

式(47)の流速分布は渦動粘性係数を一樣と仮定することで導かれている。Q3D-FEBS では、乱れスケール l_d を鉛直方向に一定としているため、等流状態に式(12)が式(47)の流速鉛直分布と一致するには乱れエネルギーが一樣分布になる必要がある。式(43)に示す水面上の乱れエネルギーの輸送方程式には、乱れの生産項が含まれないため、Q3D-FEBS の乱れエネルギーは、等流状態に一樣分布から若干外れることになるが、数値実験から式(12)は式(47)の流速鉛直分布とほぼ一致し、マンシング則の等流水深を説明できることを確認している。

底面と河床面の距離 $\delta z_b (= c_{zb} h)$ を定めるパラメータ c_{zb} は、式(39)の底面上の運動方程式の抵抗項の大きさに直接関係するため、各項とのバランスを見ながら定める必要がある。現在のところ、水深よりも大きな計算格子を用いる場合は $c_{zb} = 0.03$ 程度、水深よりも十分小さな計算格子を用いる場合は、 δz_b が計算格子幅の1/10程度になるように c_{zb} を定めるのがよいと考えている。なお、3章、4章の計算には c_{zb} を0.03~0.01の範囲で与えている。 c_{zb} の大きさは、底面を横切るフラックスの大きさとともに今後の検討課題である。

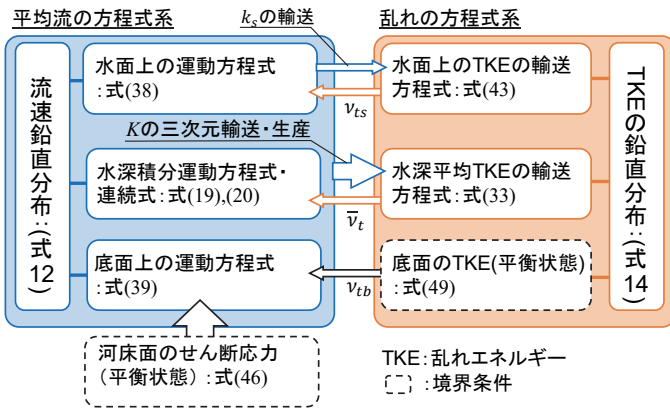


図-3 時間発展型の方程式群の相互関係

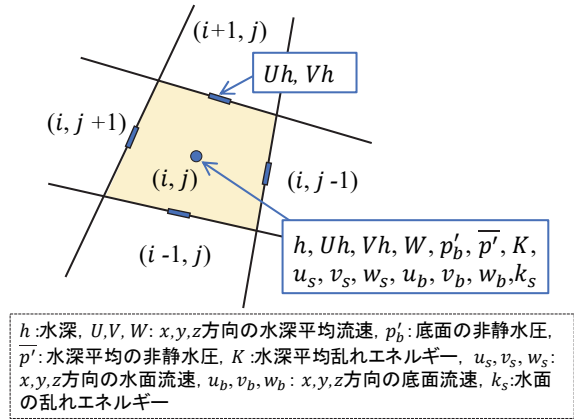


図-4 計算格子における主要な変数の配置

表-1 対象とした実験条件

| | Gotoh et al. ⁴⁴⁾ | Chanson ⁴⁵⁾ | Chachereau & Chanson ⁴⁶⁾ |
|--|-----------------------------|------------------------|-------------------------------------|
| 跳水の形態 | 波状跳水 | 波状跳水 | 完全跳水 |
| 水路長 (m) | 15* | 20 | 3.2 |
| 水路幅 (m) | 0.86* | 0.25 | 0.5 |
| 水路勾配 | 1/282 | 1/225 | 水平床 |
| 流量 (10 ³ m ³ /s) | 87.5* | 4.96 | 44.6 |
| 流入射流の条件 | | | |
| フルード数 | 1.11 | 1.27 | 3.1 |
| レイノルズ数 | 1.0×10 ⁵ * | 2.1×10 ⁴ | 8.9×10 ⁴ |
| アスペクト比 ^{**} | 9.0 | 8.7 | 11.0 |
| 乱流境界層の発達状況 | 完全 | 完全 | 不完全 |

*アスペクト比=(水路幅)/(跳水開始地点の射流水深)

(2) Q3D-FEBS の数値解析法と上下流端・側壁の境界条件

図-3 に Q3D-FEBS で解かれる時間発展型の方程式群の相互関係を示す。時間発展型の方程式は、式(19)の水深積分連続式、式(20)の水深積分運動方程式、式(33)の水深積分乱れエネルギーの輸送方程式、式(38)の水面上の運動方程式、式(39)の底面上の運動方程式、式(43)の水面上の乱れエネルギーの輸送方程式である。全て時間前進の陽解法で計算する。図-4 に計算格子における主要な変数の配置を示す。本研究では、水深積分運動方程式の移流項の計算に CIP-CSL 法を応用する⁴³⁾。このため、式(20)を計算格子で面積分、計算格子の境界で線積分することで離散化し、 U_h, V_h の面平均値と線平均値を計算する。その他の主要変数は、計算格子の面平均値のみ計算する。

また、式(31)の底面の非静水圧の方程式、式(32)の水深平均の非静水圧の方程式、式(41)の水面・底面での非静水圧の鉛直勾配の方程式は、 z 方向の運動方程式から導かれるため、移流項の計算が必要となる。本研究では、水深積分運動方程式を除く全ての方程式の移流項の計算

に一次精度の風上差分を用いる。Q3D-FEBS は、非静水圧を考慮した流れの計算を行うが全ての未知量を陽的に解析するため、解析法が明解かつ計算負荷が小さいメリットがある。

Q3D-FEBS の解析では、上下流端の境界条件として水深平均流速、水深に加え、水表面流速、底面流速、水深平均の非静水圧、底面の非静水圧の値が必要となる。本研究では、上流端では流下方向流速を一様分布、下流端では一つ上流の計算点における流下方向流速の鉛直分布を与え、上下流端ともに横断方向流速をゼロとしている。また、上下流端では圧力分布を静水圧と仮定し、水深平均の非静水圧、底面の非静水圧をゼロとする。また、側壁では、水深積分運動方程式、水面・底面上の運動方程式ともにスリップ条件を用いる。これはアスペクト比の大きい流れを対象とすることを前提としており、側壁近傍の複雑な流れが影響するアスペクト比の小さい流れの構造を十分に考慮できなくなるが、この点については今後の検討課題とする。

3. 波状跳水と完全跳水の既往実験への Q3D-FEBS の適用性

(1) 波状跳水と完全跳水の解析

対象とした実験条件を表-1に示す。実験では、跳水開始地点より上流で流速鉛直分布が計測され、乱流境界層の発達状況が表-1のように調べられている。波状跳水を対象とした Gotoh et al.⁴⁴⁾、Chanson⁴⁵⁾の実験は乱流境界層が完全に発達した状態で跳水が生じており、完全跳水を対象とした Chachereau & Chanson⁴⁶⁾の実験は、乱流境界層の発達途中で跳水が生じる条件で行われた。

Castro-Orgaz et al.²³⁾は、彼らの提案した水深積分モデルを Gotoh et al.⁴⁴⁾の波状跳水の実験に適用し、Boussinesq 型方程式、鉛直二次元モデル (2DRANS)

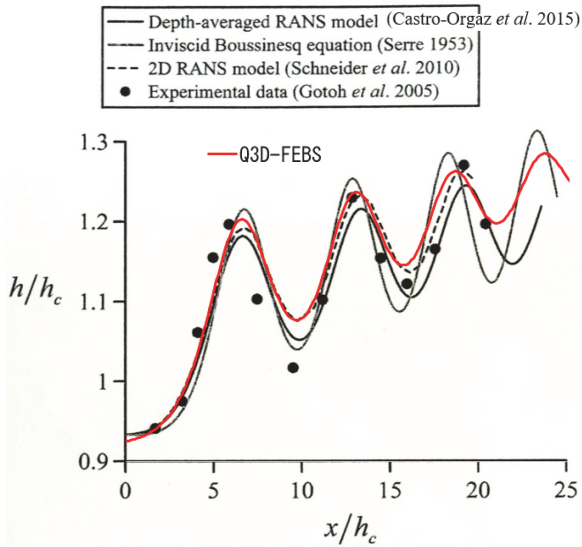


図-5 Gotoh et al.⁴⁴⁾の波状跳水実験と Q3D-FEBS, 既往の解析モデルによる水面形の比較

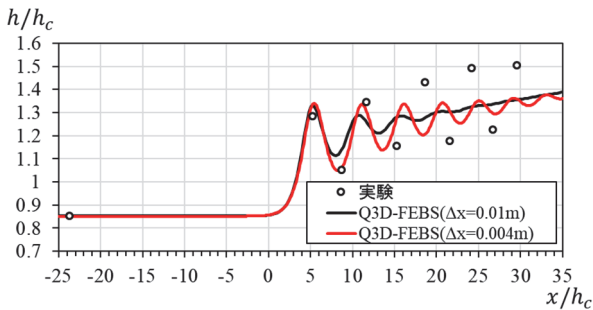
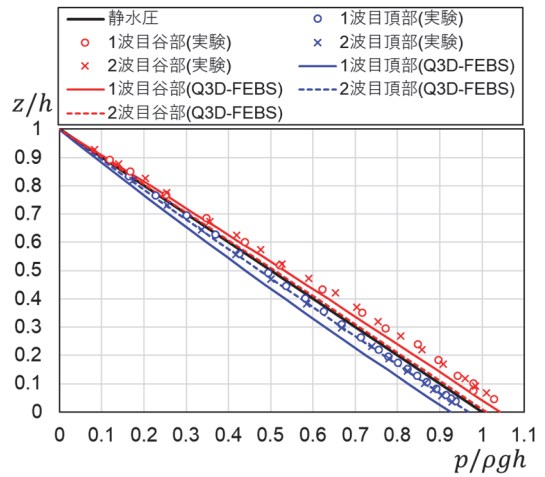
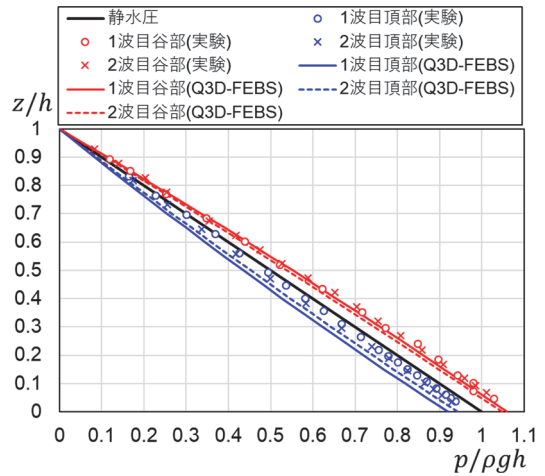


図-6 Chanson⁴⁵⁾の波状跳水実験と Q3D-FEBS による水面形の比較

の解析結果と比較している。図-5は、Castro-Orgaz et al.²³⁾の図に Q3D-FEBS の解析結果を重ね示したものである。縦断距離と水深は限界水深でそれぞれ無次元化し、跳水開始地点を原点としている。解析条件は、表-1のとおりである。Gotoh et al.⁴⁴⁾の論文には、詳細な水力条件の記載がなく、表-1 の流量や水路幅等の“*”が付いた値は論文に記載された情報からの推定値である。Castro-Orgaz et al.²³⁾と同様に跳水開始地点より上流の水深が 0.0953 m、フルード数が 1.11 となるように粗度係数 $0.011 \text{ m}^{-1/3}/\text{s}$ 及び流量を与え、流速分布が十分発達した水路上流端から 11.3 m の位置で跳水が生じるように水路下流端水位を調整し解析を行った。計算格子幅 Δx は $\Delta x = 0.01 \text{ m}$ ($\Delta x/h_2 \doteq 0.1$, h_2 : 共役水深) とし、計算刻み時間は $1/10^4$ 秒とした。図-5 に示すように、薄い黒の実線で示す Boussinesq 型方程式は、波状跳水の水面形が最もシャープで波長が短い。黒の実線で示す Castro-Orgaz et al.²³⁾の水深積分モデルと黒の点線で示す 2DRANS は、波高に若干の違いが見られるものの、実験の波状跳水の波長や振幅を比較的良く説明できている。赤の実線で示す著者らの Q3D-FEBS は、実験に比べ三波目の頂部位置がやや上流側に生じているが、こ



(a) $\Delta x = 0.01 \text{ m}$



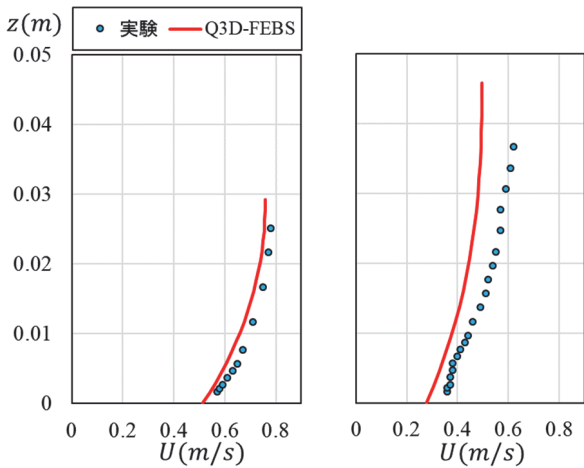
(b) $\Delta x = 0.004 \text{ m}$

図-7 Chanson⁴⁵⁾の波状跳水実験と Q3D-FEBS による圧力分布の比較

れらの解析モデルと同程度の再現性を持つことが分かる。

Chanson⁴⁵⁾の波状跳水の実験は、水路床、側壁がガラス製の水路を用い、水路上流端から 9.5 m~15 m の位置で跳水が生じるように水路下流端の水位が調節されている。解析は実験と同じ条件で行い、粗度係数は跳水開始地点より上流地点の水深が実験と一致するように $0.0092 \text{ m}^{-1/3}/\text{s}$ とした。また、計算格子幅 Δx の影響を調べるため、 $\Delta x = 0.01 \text{ m}$ ($\Delta x/h_2 \doteq 0.25$)、 $\Delta x = 0.004 \text{ m}$ ($\Delta x/h_2 \doteq 0.1$) の 2 ケースで解析した。計算刻み時間はそれぞれ $1/10^4$ 秒、 $1/10^5$ 秒である。

図-6は、水路中央部における実験と解析の無次元水深の縦断分布の比較を示す。実験の無次元水深はポイントゲージによる計測値(平均時間は不明)であり、解析の無次元水深は 10 秒間の平均値である。図-6 の黒の実線で示す $\Delta x = 0.01 \text{ m}$ とした場合、解析は波状跳水の一波目の波高を説明するものの、一波目の谷部以降の水面形を再現できていない。赤の実線で示す $\Delta x = 0.004 \text{ m}$ とした場



(a) 跳水開始地点の上流断面 (水路上流端から 10.99m) (b) 一波目頂部断面

図-8 Chanson⁴⁵⁾の波状跳水実験と Q3D-FEBS による流速鉛直分布の比較

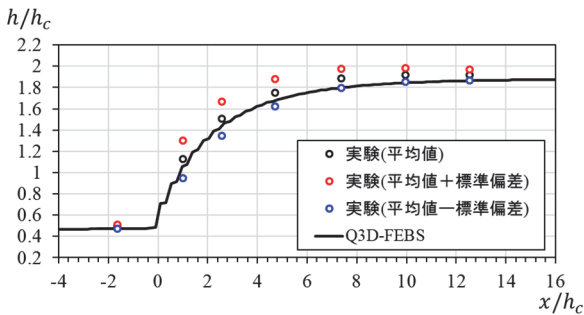
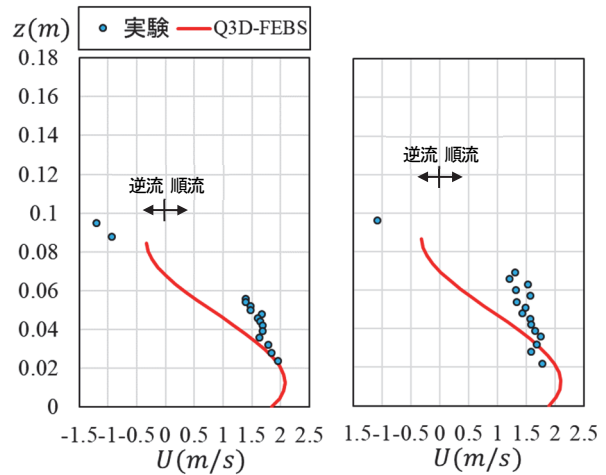
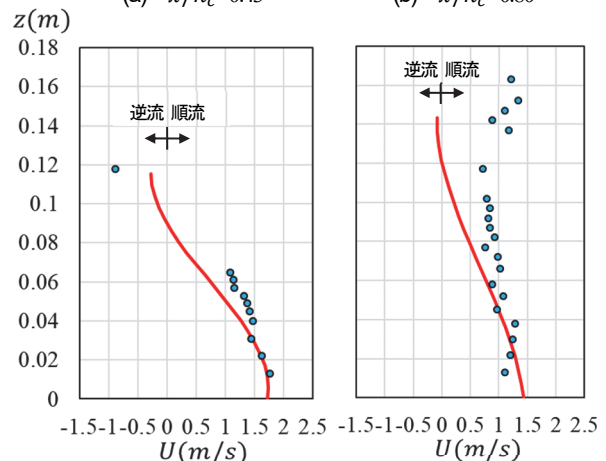


図-9 Chachereau & Chanson⁴⁶⁾の完全跳水実験と Q3D-FEBS による水面形の比較

合、解析は波状跳水の二波目の頂部まで再現できている。一方で、解析は実験に比べ波状跳水の波長が短く、波高の減衰が早く計算される傾向にあり、三波目以降は実験との差が顕著になる。図-7は、波状跳水の一波目及び二波目の頂部断面と谷部断面における実験と Q3D-FEBS の圧力分布の比較である。圧力は底面の静水圧 ρgh で無次元化し、図中の黒の実線は静水圧分布を比較のため示す。○×の実験結果が示すように、非静水圧の効果により圧力分布は、波状跳水の頂部断面では静水圧よりも小さく、谷部断面では静水圧よりも大きくなる。実線と点線で示す Q3D-FEBS の解析圧力分布はこの変化の傾向を説明している。図-7(a)の $\Delta x=0.01\text{m}$ とした場合は、二波目の谷部にくるとほとんど非静水圧成分がないのに対し、図-7(b)の $\Delta x=0.004\text{m}$ とした場合は、二波目においても非静水圧成分が大きいままであり、特に谷部断面の圧力分布は計測値とほぼ一致する。このように、波状跳水は、水面曲率に起因する非静水圧が重要な現象であるため、 Δx の大きさが解析結果に与える影響は大きい。 Δx をさらに小さくすれば、図-6の三波目以降の水面形を再現できる可能性があり、高次の離散化手法の導入とともに今後の検討課題である。



(a) $x/h_c=0.43$ (b) $x/h_c=0.80$



(c) $x/h_c=1.61$ (d) $x/h_c=3.21$

図-10 Chachereau & Chanson⁴⁶⁾の完全跳水実験と Q3D-FEBS による流速鉛直分布の比較

図-8 は、跳水開始地点の上流断面(水路上流端から 10.99 m)と波状跳水の一波目頂部断面における実験と $\Delta x=0.004\text{m}$ とした場合の解析の流速鉛直分布の比較である。流速はピトー管により計測され(平均時間は不明)、解析の流速は 10 秒間の平均値である。図-8(b)のプロットで示すように、フルード数 1.27 では波状跳水一波目の頂部断面で逆流は生じず、流速は水面付近の方が大きい。図-8(b)の実線で示す解析はこの傾向を説明できている。

上述したように、Q3D-FEBS は、水深の 10 分の 1 程度の Δx を用いることで波状跳水の水面形等を二波目まで説明できた。波状跳水の実験では、フルード数が 1.2 を超えると跳水開始地点の側壁で衝撃波が形成され、アスペクト比の小さい場合は、流れの構造が三次元的になることが知られている^{47),48),49)}。Gotoh et al.⁴⁴⁾の実験は衝撃波の影響を受けないが、Chanson⁴⁵⁾の実験は衝撃波の影響を受けることが確認されている。しかし、解析では衝撃波の発生は認められず、横断面内で水位差のほとんど生じない計算結果となった。アスペクト比の小さい跳水に対する Q3D-FEBS の適用性については、さらなる検討が必要である。

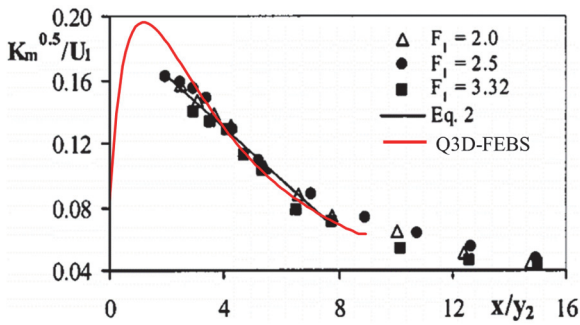


図-11 Liu et al.⁵³⁾の完全跳水実験と Q3D-FEBS による乱れエネルギー縦断分布の比較

表-1 の Chachereau & Chanson⁴⁶⁾の完全跳水の実験は、側壁がガラス製、水路床がポリ塩化ビニル製の水路を用い、水路上流端から約 1.5 m の位置で跳水が生じるように水路下流端の水位が調節されている。実験では、スルースゲートにより水路上流端の流れがコントロールされている。解析では、既往研究⁵⁰⁾を参考に粗度係数 $0.009 \text{ m}^{-1/3}/\text{s}$ を与え、跳水開始地点より上流地点の水深が実験と一致するように、水路上流端で水深 0.04 m を与えた。その他の条件は実験と同じである。計算格子幅は $\Delta x = 0.02 \text{ m}$ ($\Delta x/h_2 \approx 0.12$) とし、計算刻み時間は $1/10^4$ 秒とした。

図-9 は、水路中央部における実験と解析の水深縦断分布の比較である。縦断距離と水深は限界水深でそれぞれ無次元化し、跳水開始地点を原点としている。実験の無次元水深は、ドップラー変位計による 10 秒間の平均値と平均値±標準偏差の値である。解析の無次元水深は、水位変動がほぼ見られないため、10 秒間の平均値のみで示した。Q3D-FEBS は完全跳水の水面形を良く説明できている。図-10 は、水路中央部における実験と解析の流速鉛直分布の比較である。実験の流速は、二点電極型のボイド率計で計測した 45 秒間の平均値であり、解析の流速は 45 秒間の平均値である。一般に、ボイド率(気液混合体に占める空気の割合)が 0.9 以上の領域は、飛散する水滴等から構成される⁵¹⁾ため、ボイド率が 0.9 以上の計測点は除外している。ボイド率計は、気液界面の流速を計測するため、気泡の到達しない底面付近の流速は検討できないが、解析は完全跳水の主流部の流速を良く説明できている。また、解析は、完全跳水の特徴である水面付近での逆流を説明できている。水面流速の大きさには、実験と解析で差が見られる。この理由は明白ではないが、Q3D-FEBS は空気混入を考慮していないため、空気混入率の高い水面付近では、ボイド率計による気液界面の流速とは異なる可能性がある。解析のローラー渦の長さ(跳水開始地点から水面流速が順流に戻るまでの長さ)は約 0.44 m であり、式(51)に示す Hager の実験式⁵²⁾による約 0.56 m に比べ若干短い。

$$\frac{L_r}{h_1} = -12 + 160 \tanh\left(\frac{F_1}{20}\right) \quad (51)$$

ここで、 F_1 : 跳水開始地点の上流断面のフルード数、 L_r : ローラー渦の長さである。実験データのばらつきを考えれば、十分な再現性を持つものと考えられるが、異なるフルード数での解析を行い実験値との比較検討が必要である。

図-11 では、乱流モデルの適合性の検証を目的に、Liu et al.⁵³⁾の実験と水路中央部の乱れエネルギー K_m の縦断分布を比較した。実験の K_m は、ドップラー流速計を用い各地点で計測された乱れエネルギーの最大値であり、流入射流の流速 U_1 で無次元化されている。解析では、式(14)から求められる各地点の乱れエネルギーの最大値を Liu らと同様に無次元化し、図-11 の赤の実線で示している。縦断距離は、跳水開始地点を原点にとり、水路下流端の水深 y_2 で無次元化している。解析は、実験の乱れエネルギーの大きさをほぼ説明出来ている。Liu らは、図-11 の黒の実線で示すように、 $K_m^{0.5}/U_1$ が x/y_2 に対し直線的に減衰することを定式化している。解析は、黒の実線に比べやや減衰速度が速いものの、この傾向を説明できている。

以上の検討から、Q3D-FEBS は波状跳水と完全跳水を統一的に説明できる解析モデルであることが分かった

(2) 跳水形態の遷移過程の解析

上述した Chachereau & Chanson⁴⁶⁾の実験条件を用いて、Q3D-FEBS により波状跳水から完全跳水への遷移過程を検討する。最初に、上流端で流量 $0.02 \text{ m}^3/\text{s}$ 、水深 0.04 m 、下流端で水深 0.054 m を与え、波状跳水を起こす。その後、流れが落ち着いた状態を計算開始時間 (0 秒) とし、上流端の水深を 0.04 m に保ったまま、60 秒かけて流量を $0.0446 \text{ m}^3/\text{s}$ 、55 秒かけて下流端の水深を 0.172 m まで上昇させる。その後は、上流端の流量、下流端の水深を一定に保ち流れが落ち着くまで計算する。なお、上流端の水深は計算開始時間から変化させず 0.04 m を与える。また、下流端の水深および水位上昇速度は、跳水開始位置が $x=1 \text{ m} \sim 2 \text{ m}$ の間にくるように設定した。

図-12 は、上記条件の下で行った Q3D-FEBS による波状跳水から完全跳水への跳水形態の遷移過程の解析結果を示す。図-12(a), (b), (c)に示すように、流量の上昇に伴いフルード数が増大することで、跳水開始位置が下流に移動し、波状跳水の一波目頂部で水面流速が減速し始めている。その後、図-12(d), (e)に示すように、フルード数が 2.1 まで上昇すると波高の減衰が明白に見られるようになり、水面付近の逆流域の拡大とともに跳水の開始位置が上流側に移動する。上流端の流量を $0.0446 \text{ m}^3/\text{s}$ 、下流端の水深を 0.172 m まで上昇させた後、10 秒程度通

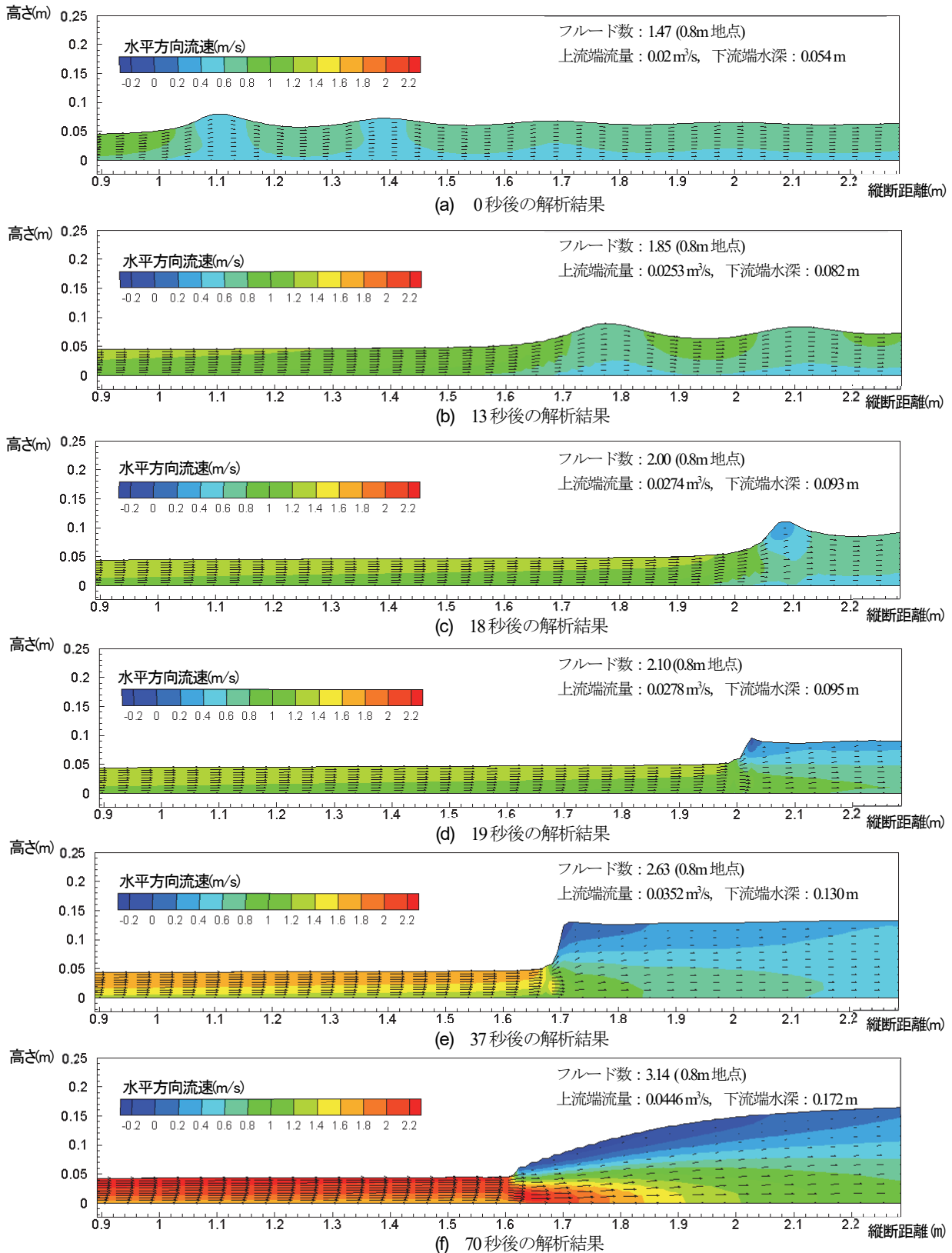


図-12 Q3D-FEBSによる波状跳水から完全跳水への遷移過程の解析結果

水を続けると、最終的に図-12(f)に示すような完全跳水の状態の流れが安定する(フルード数3.14)。

このような非定常性の高い現象に対するQ3D-FEBSの再現性については、今後、実験等から確かめる必要があ

るが、少なくとも水面上の逆流とこれに伴う流速鉛直分布、圧力分布の変形等を解析することで、水深積分モデルの枠組みで、波状跳水から完全跳水への遷移過程が解析可能であることが分かった。

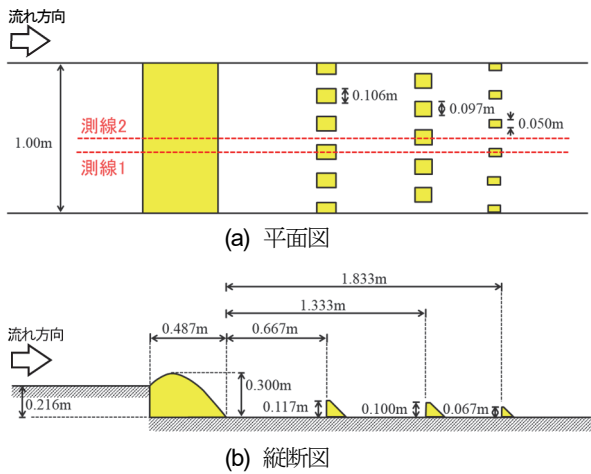


図-13 床固・水叩き区間の平面図と縦断面図

表-2 大河津新第二床固の大型水理模型実験の条件

| 跳水の形態 | 強制跳水 |
|----------------------------|-------|
| 模型設置区間(m) | 10.25 |
| 流量 (m ³ /s) | 0.239 |
| 下流端水深 (10 ⁻² m) | 23.87 |

4. 越流構造物下流の跳水及びその減勢区間における一連の流れに対する Q3D-FEBS の適用性

(1) 跳水及びその減勢区間における一連の流れの解析

a) 大河津新第二床固の大型水理模型実験の概要

大河津新第二床固の縮尺 1/30 の大型水理模型実験が、国土交通省信濃川河川事務所により行われた。模型設置区間は 10.25 m (床固法尻を原点 $x=0$ とし、 $x=-4.25$ m ~ 6 m の区間) である。図-13 に床固・水叩き区間の平面図と縦断面図を示す。新第二床固は 9m (模型値: 0.30m) もの落差を持ち、超過洪水を含む種々の流量条件に対し、水叩き下流の水位が目標水位を満足するように、図-13 に示す三列のバップルピアの配置が実験と数値解析から試行錯誤的に決められた。表-2 に、対象とした計画流量 11,000 m³/s を想定した実験条件を示す。バップルピアを取り除いた状態で越流部下流の水平床区間において、自然跳水開始地点より上流の射流部で計測したフルード数及びレイノルズ数の値はそれぞれ 2.4 と 2.3×10^5 である。実験では、図-13 の赤の点線で示す測線 1、測線 2 上で水位と流速鉛直分布が計測されている。実験条件は変動の大きい流れであったため、水位はポイントゲージの先端が水中にある時間と離れている時間が同程度になる高さを平均水位として計測するとともに、5 回程度の周期的な水面変動の中で最も高い水位を最大水位として計測している。流速は電磁流速計により、10 秒間の平均流速が計測された。

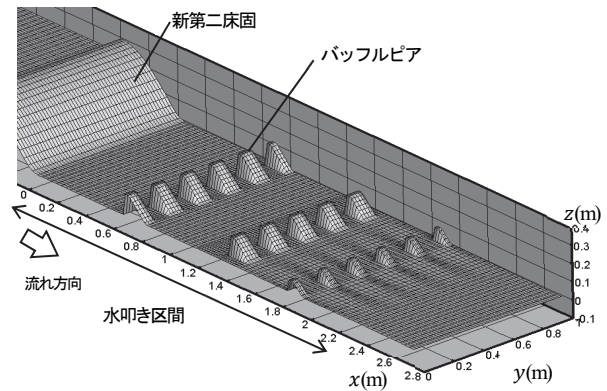


図-14 床固・水叩き区間の解析地形

b) 解析条件

模型設置区間を対象とし、上流端で流量 0.239 m³/s、下流端で水深 23.87 10⁻² m を与えた。粗度係数は 0.012 m^{1/3}/s とした。図-14 に解析に用いた床固・水叩き区間の地形を示す。平面二次元解析等の通常の水深積分モデルでは、バップルピア等の大型粗度周辺の流れを適切に計算できないため、運動方程式に流体力項を付加することで大型粗度の抵抗が考慮される。これに対し、Q3D-FEBS では、図-14 に示す大型粗度の形状を解析に取り込み流体力を直接計算する。大型粗度から受ける非静水圧分布による抵抗は、式(20)右辺第三項で評価される。なお、水深積分モデルでは、基本的に垂直壁を扱えないため、垂直壁付近では計算格子を密に配置し急勾配斜面として扱う。計算格子は幅 0.035 m ~ 0.01 m ($\Delta x/h_2=0.15 \sim 0.04$) の範囲で作成した。計算刻み時間は 1/10⁴ 秒である。また、バップルピアによる強制跳水の解析を安定に行うため、底面の非静水圧 p'_b 、水深平均の非静水圧 \bar{p}' を周囲 9 つの計算格子で平均化して評価している。平均化方法の詳細は巻末付録 2 に示す。

c) 解析結果と考察

写真-1 は、実験の床固・水叩き区間の流況を側方から撮影した写真である。図-15、図-16 は、図-13(a)の測線 1、測線 2 上の実験と解析の水位縦断分布と流速鉛直分布の比較である。図-15(b)、図-16(b)に示すように、解析水位は、 $x=2.4$ m 付近で観測水位に比べて若干低くなるものの、その他の地点ではプロットで示す実験水位の平均値と最大値の間にあり、実験結果を良く説明している。また、写真-1 から、実験では一列目のバップルピア上流で強制跳水が生じている。図-15(b)、図-16(b)に示す解析は、写真-1 から確認できる跳水の開始位置や形状を再現しており、実験の $x=0.4$ m 付近における水面流速の逆流と大きな底面流速の発生を説明できている。

図-15(a)、図-16(a)に示すように、実験ではバップルピア背後で逆流域が形成され、一列目のバップルピアより下流では最大流速発生位置が底面付近から水面付近に移動している。図-15(b)、図-16(b)に示す解析では、一列目

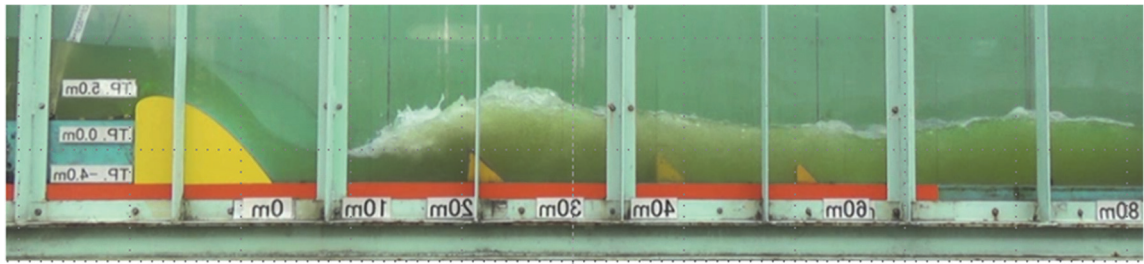
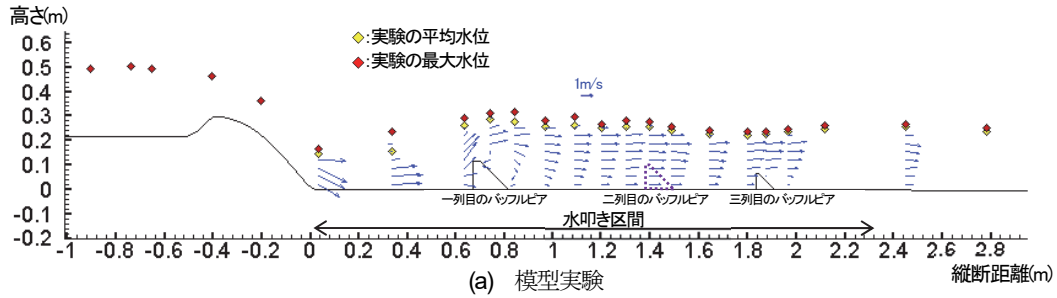
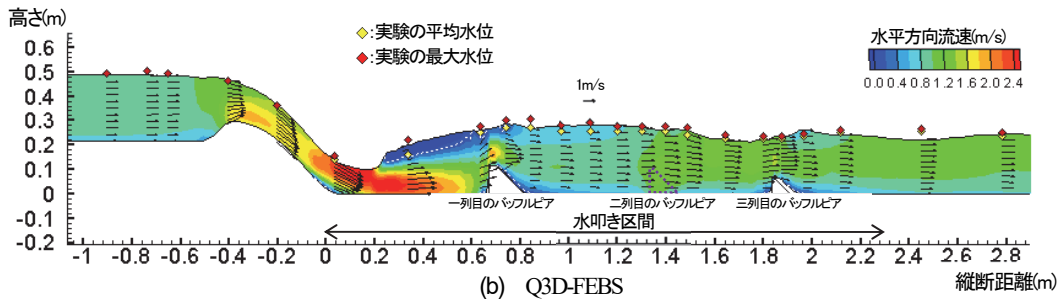


写真-1 計画流量 11,000m³/s を想定した新第二床固大型水理模型実験の流況

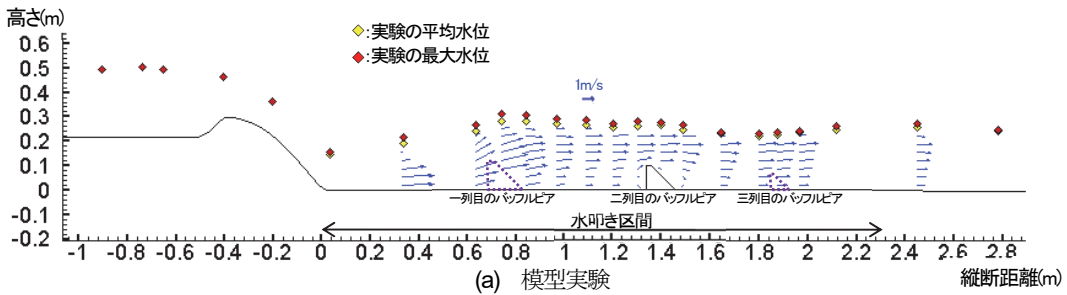


(a) 模型実験

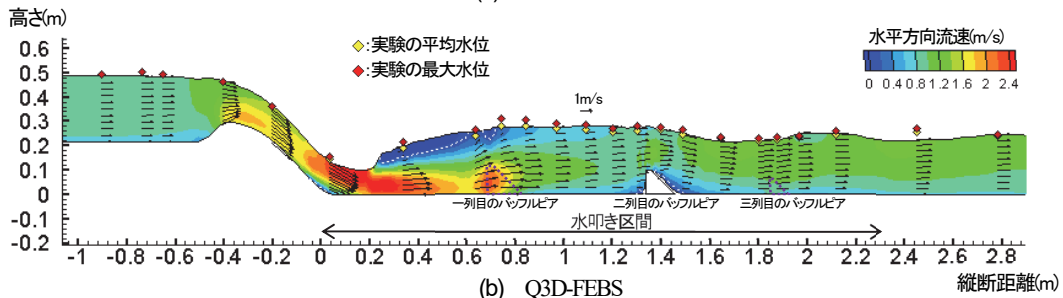


(b) Q3D-FEBS

図-15 測線1上の実験とQ3D-FEBSの水位縦断分布と流速鉛直分布の比較



(a) 模型実験



(b) Q3D-FEBS

図-16 測線2上の実験とQ3D-FEBSの水位縦断分布と流速鉛直分布の比較

と二列目のバブルピアの間の最大流速発生位置が実験に比べ低い位置に生じている。Q3D-FEBSでは、水平方向流速の鉛直分布を式(12)の三次関数で仮定しているが、底面での流速勾配が境界条件として考慮されないため、最大流速発生位置が水面付近よりやや下方に生じ易くなっている。このことが、一列目と二列目のバブルピア

の間の最大流速発生位置を十分に説明できない主な理由である。

上述の課題はあるものの、解析は最大流速発生位置が二列目のバブルピアから下流で次第に水面付近に移動する実験の流れの特徴を良く説明できている。

以上のように、Q3D-FEBSは大きな落差（実スケール

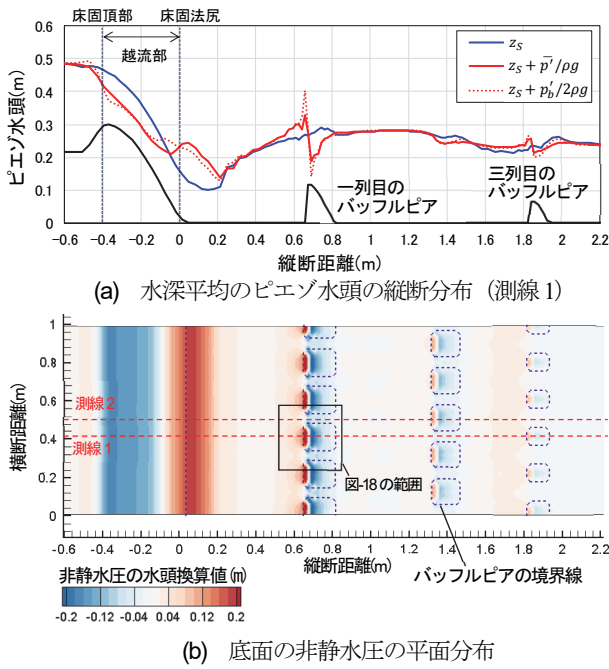


図-17 水深平均のピエゾ水頭の縦断分布と底面の非静水圧の平面分布

で 9 m) を持つ構造物を越流する流れとバブルピアによる強制跳水, バブルピア背後での逆流域の形成や最大流速発生位置の水面付近への移動を水深積分モデルの枠組みで解析できており, 大規模越流構造物下流の跳水及びその減勢区間における流れの解析に有効であることが分かった。以下では, Q3D-FEBS で導入された非静水圧分布の方程式, 底面上の運動方程式が解析結果に果たす役割について考察する。

図-17(a), (b)は, Q3D-FEBS の解析結果から作成した測線 1 上の水深平均のピエゾ水頭 ($=z_s + \bar{p}'/\rho g$) の縦断分布と底面圧力の非静水圧成分 ($=\bar{p}'_b/\rho g$) の平面分布である。図-17(a)の赤の実線は Q3D-FEBS による水深平均のピエゾ水頭である。Q3D-FEBS の水深平均のピエゾ水頭は, 青の実線で示す水位に比べ, 非静水圧の効果により床固越流部やバブルピア背後で低下し, 床固法尻やバブルピア前面で上昇する。Q3D-FEBS は, このような越流流れやバブルピア周辺の非静水圧分布を適切に解析できることから, 図-15(b), 図-16(b)に示したように実験の水面形を説明できている。

Q3D-FEBS では, 鉛直方向流速を直線分布と仮定することで (式(27)), 式(30)に示したように非静水圧分布は放物線分布となる。これに対し, 鉛直方向流速を一様分布と仮定して, 式(30)の右辺第二項をゼロとすれば, 非静水圧分布は直線分布($\bar{p}'=\eta p'_b$)となる。すなわち, 鉛直方向流速の大きさが鉛直方向に変化する場合は, 非静水圧分布は直線分布から外れることになる。図-17(a)の赤の点線は, 比較のため非静水圧分布を直線分布とした場合の水深平均のピエゾ水頭を示したものである。赤の実

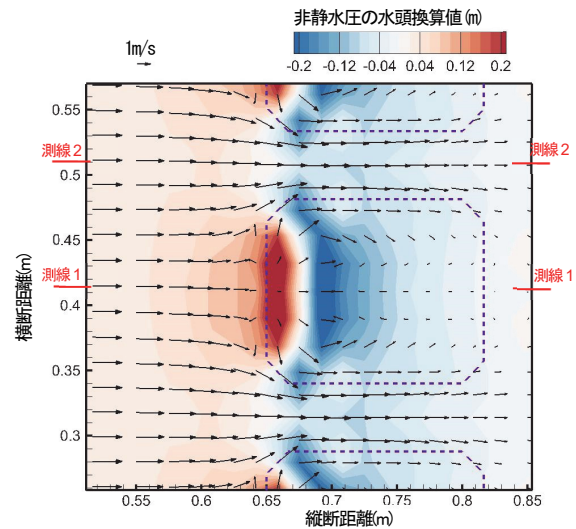


図-18 一列目のバブルピア周辺での底面における非静水圧の平面分布と底面流速の重ね図

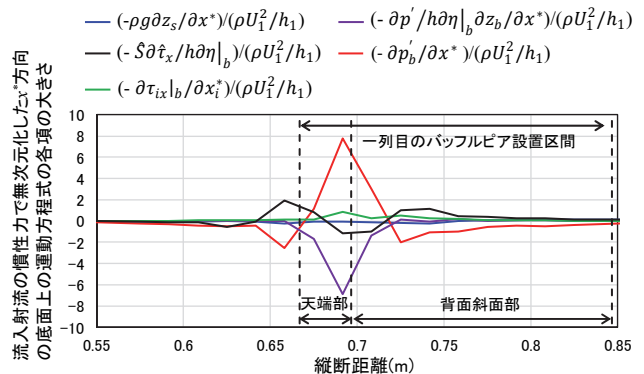


図-19 一列目のバブルピア周辺での x^* 方向の底面流速の運動方程式の各項のオーダー比較 (測線 1)

線で示す Q3D-FEBS の水深平均のピエゾ水頭は, 赤の点線に比べ縦断変化が滑らかである。特にバブルピア周辺において, その差が顕著である。この理由を以下で述べる。

図-18 は, 図-17(b)の黒枠の範囲を拡大し, 底面流速を重ね示したものである。図-18 に示すように, Q3D-FEBS では, バブルピア前面やバブルピア背後で底面流速の逆流が計算されている。バブルピア周辺では, 底面付近で大きな下降流や上昇流が生じるため, 鉛直方向流速が鉛直方向に大きく変化し, 図-17(a)の赤の実線と点線に違いが生じている。このような流れ場では, 非静水圧分布を直線分布と仮定することは適切ではなく, 式(27)の鉛直方向流速分布を用いて導かれた式(30)で非静水圧分布を与えることにより, 実験のバブルピア周辺の水面形を適切に説明できることが分かった。

次に, バブルピア周辺の底面流速に対する式(39)に示した底面上の運動方程式の各項の役割について検討する。図-19 は, x^* 方向の底面上の運動方程式に着目し, 右辺の各項を慣性力の代表値 $\rho U_1^2/h_1$ (U_1, h_1 : 床固法尻 ($x=0$)における流入射流の水深平均流速と水深) で無次元化し, 測線 1 上の縦断分布を示したものである。値が

正の項は底面流速を加速する方向に、値が負の項は底面流速を減速する方向に働くことを意味する。バップルピアの前面では、 $(-\hat{\delta}\partial\hat{t}_x/h\partial\eta|_b)/(\rho U_1^2/h_1)$ の抵抗項とともに $(-\partial p'_b/\partial x^*)/(\rho U_1^2/h_1)$ が他の項に比べ大きく、その値は縦断的に負である。したがって、図-18に示したバップルピア前面での底面流速の逆流には、式(39)の右辺第二項が重要なことが分かる。一方、底面形状の変化が大きいバップルピアの天端部付近では、 $(-\partial p'/h\partial\eta|_b\partial z_b/\partial x^*)/(\rho U_1^2/h_1)$ が $(-\partial p'_b/\partial x^*)/(\rho U_1^2/h_1)$ とほぼ同じオーダーで働くようになる。これらの項に比べ他の項は小さい。図-18から、非静水圧成分はバップルピア前面で上昇し、バップルピア背後で低下するため、 $(-\partial p'_b/\partial x^*)/(\rho U_1^2/h_1)$ の値は天端部で正となり底面流速を加速する方向に働く。これに対し、 $(-\partial p'/h\partial\eta|_b\partial z_b/\partial x^*)/(\rho U_1^2/h_1)$ の値は、天端部で負となり底面流速を減速する方向に働く。このことから、図-18に示したバップルピア背後の逆流域形成には、式(39)の右辺第三項が重要なことが分かる。

水面流速について同様の検討を行うには、砕波の瞬間を捉える必要があり難しいが、水面流速の逆流の計算には、式(39)の右辺第三項に対応する式(38)の右辺第二項が重要になるものと考察される。

(2) 得られた成果の特色、今後の展望と課題

本研究の先行研究として、内田・福岡により開発されたGBVC法³²⁾に基づく著者ら³³⁾、内田³³⁾の研究がある。1章で述べたように、水深積分渦度方程式を用いるGBVC法システムの解析法では、砕波(剥離)条件を設定し、跳水形態の遷移や減勢工背後の逆流域形成をモデル化する必要があり、課題となっていた。また、非静水圧分布を直線分布で与えており、前節で考察したように、底面付近で大きな下降流・上昇流の生じるバップルピア周辺の解析に課題があるものと考えられる。

本論文では、水面・底面形状の急激な変化に伴う逆流(剥離)を直接解析するために、境界面(水面・底面)上の流れの方程式を導入した。さらに、鉛直方向流速の鉛直分布を考慮した圧力分布の方程式、乱れエネルギーの鉛直分布を考慮した乱流モデルを定式化し、これらを水深積分した連続式、運動方程式とともに解析する非静水圧準三次元解析法(Q3D-FEBS)を提案した。

3章で示したように、Q3D-FEBSは、砕波(剥離)条件を用いることなく、実験の波状跳水、完全跳水、波状跳水から完全跳水への遷移過程を解析可能である。また、4章では、床固を越流する流れ、バップルピアによる強制跳水、バップルピア背後での逆流域の形成や最大流速発生位置の水面付近への移動を解析できることを明らかにした。これらの結果から、Q3D-FEBSは、跳水及びその減勢区間における流れに対する汎用性の高い解析

法と言える。また、Q3D-FEBSは、境界面上の流れと水深平均の流れのみを解析するため、三次元解析に比べて計算負荷を著しく節約できる。同様の計算条件であれば、平面二次元解析の2~3倍程度の時間で非静水圧を含めた三次元流れを計算可能である。さらに、水面や底面形状の影響が方程式系の中で分かり易く表現されており、解析結果を力学的に解釈し、物理現象の本質的な理解を得るのに適している。

一方、波状跳水の開始地点付近の両側壁で形成される衝撃波については、Q3D-FEBSでは再現出来なかった。アスペクト比の小さい跳水の流れ構造や跳水形態の遷移過程を解析するためには、側壁近傍の流れ構造を適切に考慮し、衝撃波の形成とそれに伴う流れ場の変化を正しく求める必要があり、今後の検討課題である。

5. 結論

本論文では、跳水及びその減勢区間における非静水圧準三次元解析法(Q3D-FEBS)について検討した。以下に、主な結論を示す。

- 1) 境界面(水面・底面)での逆流を解析するために、境界面上の流れの方程式を導出した。さらに、鉛直方向流速の鉛直分布を考慮した非静水圧分布の方程式、乱れエネルギーの鉛直分布を考慮した乱流モデルを導出し、これらを水深積分の連続式及び運動方程式と連立して解析する非静水圧準三次元解析法(Q3D-FEBS)を構築した。
- 2) Q3D-FEBSを波状跳水と完全跳水の既往実験に適用し次のことを明らかにした。

波状跳水は水面曲率に起因した非静水圧が重要な現象であり、計算格子幅の影響を大きく受ける。Q3D-FEBSは、水深の1/10程度の計算格子を用いることで、実験の波状跳水の水面形を二波目まで説明できる。また、Q3D-FEBSは、既往の波状跳水の水深積分モデル²³⁾、鉛直二次元モデルと同程度に波状跳水の水面形、圧力分布を再現できることを示した。但し、Chanson⁴⁵⁾の実験には、衝撃波の影響が含まれるため、この点についてはさらなる検討が必要である。

Q3D-FEBSは、完全跳水の水面形や流速鉛直分布を説明できることを示した。また、実験のローラー渦の長さ、跳水開始地点から下流での乱れエネルギーの大きさや減衰速度をほぼ説明できた。

上記の検討結果に加え、Q3D-FEBSを用いた波状跳水から完全跳水への遷移過程の解析を行い、Q3D-FEBSにより、波状跳水、完全跳水、波状跳水から完全跳水へと跳水形態が遷移する一連の流れ

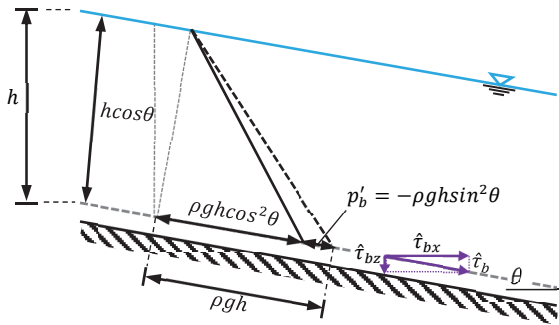


図-A1 水深の定義と斜面上の等流の静水圧分布

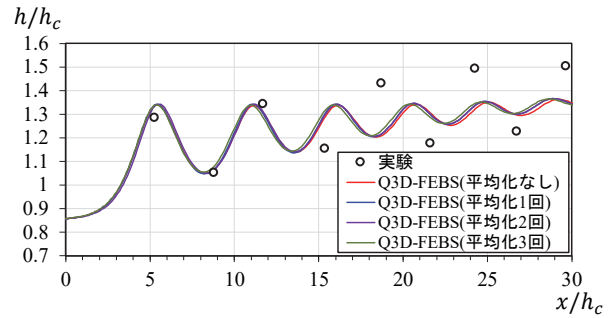


図-A2 圧力の平均化が Q3D-FEBS による波状跳水 (Chanson⁴⁵) の水面形解析に与える影響

を解析できることを明らかにした。

- 3) 大河津分水路新第二床固の大型水理模型実験に Q3D-FEBS を適用し、実験に比べてバップルピア背後の逆流域が小さく計算される傾向にあるものの、床固を越流する流れ、バップルピアによる強制跳水、バップルピア背面での逆流域の形成や最大流速発生位置の底面付近から水面付近への移動を水深積分モデルの枠組みで説明できることを示した。このことから、Q3D-FEBS は大規模越流構造物下流の跳水及びその減勢区間における流れの解析に有効であることを示した。

謝辞：国土交通省信濃川河川事務所からは、大河津新第二床固の大型水理模型実験に関する計測データを提供頂いた。(株)建設技術研究所水理センター伊藤幸義氏からは、同実験に関し貴重なご意見を頂いた。本研究の一部は、科学研究費補助金若手研究(課題番号：18K13839, 代表：竹村吉晴)の助成を受けた。ここに記して謝意を表す。

付録1 等流状態における底面の非静水圧

等流状態において、式(20)の運動方程式は $0 = -(\rho g h + p'_b) \partial z_b / \partial x^* - \hat{S} \hat{t}_{bx}$ となる。この時、式(31)から $p'_b = \hat{S} \hat{t}_{bz}$ でありゼロとはならない。この理由は以下に示す通りである。等流状態における底面せん断応力 \hat{t}_b は、 $\rho g h \cos \theta \sin \theta$ であるので、 $\hat{t}_{bz} = -\sin \theta \hat{t}_b$ 、 $\hat{S} = 1 / \cos \theta$ を考慮すれば、底面の非静水圧 p'_b は $-\rho g h \sin^2 \theta$ となる。等流状態では、底面に垂直方向に静水圧分布となるため、図-A1 に示すように、斜面勾配を持つ場合、底面の静水圧は $\rho g h \cos^2 \theta$ となる。これに対し、Q3D-FEBS は静水圧を鉛直方向に定義するため、底面の静水圧は $\rho g h$ となり、斜面勾配を持つ場合は実際の静水圧に比べて底面の静水圧が $\rho g h \sin^2 \theta$ だけ大きくなる。この静水圧の増分が上述した底面の非静水圧 $p'_b (=$

$-\rho g h \sin^2 \theta)$ と打ち消し合うことで斜面上の静水圧が表現されることになる。

付録2 Q3D-FEBS の圧力の平均化方法

Q3D-FEBS は、非静水圧を陽的に計算するため、平面二次元流れに拡張した場合に計算が不安定になり易い。これを防ぐために、式(31)、式(32)を用いて全ての計算格子で底面の非静水圧、水深平均の非静水圧を求めた後、これらを予測値 $p'_b{}^p$ 、 \bar{p}^p として、各計算格子の底面の非静水圧 p'_b 、水深平均の非静水圧 \bar{p} を周囲9つの計算格子の $p'_b{}^p$ 、 \bar{p}^p の重み付き平均

$$p'_b(i, j) = \{4p'_b{}^p(i, j) + 2p'_b{}^p(i + 1, j) + 2p'_b{}^p(i, j + 1) + 2p'_b{}^p(i - 1, j) + 2p'_b{}^p(i, j - 1) + p'_b{}^p(i + 1, j + 1) + p'_b{}^p(i + 1, j - 1) + p'_b{}^p(i - 1, j + 1) + p'_b{}^p(i - 1, j - 1)\} / 16 \quad (A1)$$

$$\bar{p}(i, j) = \{4\bar{p}^p(i, j) + 2\bar{p}^p(i + 1, j) + 2\bar{p}^p(i, j + 1) + 2\bar{p}^p(i - 1, j) + 2\bar{p}^p(i, j - 1) + \bar{p}^p(i + 1, j + 1) + \bar{p}^p(i + 1, j - 1) + \bar{p}^p(i - 1, j + 1) + \bar{p}^p(i - 1, j - 1)\} / 16 \quad (A2)$$

で評価することにした。ここで、 i, j : 計算格子の縦断方向と横断方向の番号である。式(A1)、式(A2)は、画像の平均化等によく使用されるガウシアンフィルタであり、平均化前の空間分布情報の特徴を維持し易い性質がある。図-A2 は、図-6 に示した Q3D-FEBS による Chanson⁴⁵ の波状跳水の水面形解析を例として、上述した圧力の平均化が解析結果に与える影響を検討したものである。平均化回数は、各計算ステップの間に上述の平均化操作を繰り返した回数を表す。平均化回数が増えるほど波状跳水の波長が短く、波高の減衰が大きくなる傾向が見られるが、図-6 に示した計算格子幅 Δx の違いに比べて影響は小さいようである。また、本研究では4章のみ圧力の平均化を行い、平均化回数は1回で安定に計算することが出来た。

付録3 本論文で使した記号の一覧

ρ : 水の密度
 g : 重力加速度
 z_s : 水面(水位)
 z_b : 底面
 z_0 : 河床面
 h : 水深
 u_i : x_i 方向の流速(u, v)
 u_{si} : x_i 方向の水面流速(u_s, v_s)
 u_{bi} : x_i 方向の底面流速(u_b, v_b)
 U_i : x_i 方向の水深平均流速(U, V)
 $u'_i = u_i - U_i$
 $\delta u_i = u_{si} - u_{bi}$
 $\Delta u_i = u_{si} - U_i$
 w : z 方向の流速
 w_s : z 方向の水面流速
 w_b : z 方向の底面流速
 W : z 方向の水深平均流速
 $\delta w = w_s - w_b$
 w_η : η 方向の流速
 p : 圧力
 p_s : 水面の圧力
 p' : 非静水圧成分
 p'_b : 底面の非静水圧成分
 \bar{p}' : 水深平均の非静水圧成分
 p_b^{*p} : 底面の非静水圧成分の予測値
 \bar{p}^{*p} : 水深平均の非静水圧成分の予測値
 k : 乱れエネルギー
 k_s : 水面の乱れエネルギー
 k_b : 底面の乱れエネルギー
 K : 水深平均の乱れエネルギー
 $k' = k - K$
 $\delta k = k_s - k_b$
 $\Delta k = k_s - K$
 τ_{ij} : レイノルズ応力
 $\bar{\tau}_{ij}$: 水深平均のレイノルズ応力
 $\hat{\tau}_i$: 水面に平行な面に作用するレイノルズ
 応力
 $\hat{\tau}_i$: 底面に平行な面に作用するレイノルズ
 応力
 $\hat{\tau}_{bi}$: 底面せん断応力
 $\hat{\tau}_{0i}$: 河床面のせん断応力
 \hat{S} : 単位水平面積当たりの水面の面積
 \hat{S} : 単位水平面積当たりの底面の面積
 ν_t : 渦動粘性係数
 ν_{ts} : 水面の渦動粘性係数
 ν_{tb} : 底面の渦動粘性係数
 $\bar{\nu}_t$: 水深平均の渦動粘性係数
 F_{ki}, F_{kz} : 乱流による水平方向及び z 方向の乱れエ
 ネルギーのフラックス
 t^* : (t^*, x_i^*, η)座標系の時間(= t)
 x_i^* : (t^*, x_i^*, η)座標系の水平座標(= x_i)
 η : (t^*, x_i^*, η)座標系の鉛直座標(= $(z_s - z)/h$)
 l_d : 乱れの長さスケール(= $c_l h$)

σ_k, c_d, c_l, c_h : 乱流モデルのパラメーター (=1.0, 0.08,
 0.07, 0.5)
 \bar{P}_k : 水深平均の乱れエネルギー生産率
 δ_{ij} : デルタ関数 (= {1 ($i=j$), 0 ($i \neq j$)})
 ϕ : 任意の変数
 δz_b : 底面と河床面の距離(= $c_{zb} h$)
 c_{zb} : δz_b に関するパラメーター
 n : マニングの粗度係数
 u_* : 摩擦速度 (= $\sqrt{\hat{\tau}_0/\rho}$)
 κ : カルマン定数 (=0.41)
 $\alpha = \kappa/6$
 C_0, c_b : 摩擦係数
 Δx : 計算格子幅
 h_c : 限界水深
 h_1 : 流入射流の水深
 h_2 : 共役水深
 U_1 : 流入射流の水深平均流速
 F_1 : 流入射流のフルード数
 L_r : ローラー渦の長さ
 K_m : 各地点の乱れエネルギーの最大値
 y_2 : 水路下流端の水深

参考文献

- 1) 国土交通省国土技術政策総合研究所: 国総研レポート2017, pp.53, 2017.
- 2) 福岡捷二: 洪水水面形観測情報の広域的・統合的活用による流域治水の考え方の構築に向けて, 河川技術論文集, 第23巻, pp.251-256, 2017.
- 3) 竹村吉晴, 福岡捷二: 洪水時の大河津分水路第二床固の流況再現技術—水理模型実験と数値解析による検討, 土木学会第69回年次学術講演会, CD-ROM, II-164, 2014.
- 4) 小淵康正, 吉村綾子, 宮川勇二, 岡村誠司, 天野光歩, 福岡捷二: 江戸川流頭部の河道計画の策定—先導的な数値解析を中心とした新しい河道設計技術—, 河川技術論文集, 第21巻, pp.153-158, 2015.
- 5) 竹村吉晴, 福岡捷二, 日下部隆昭: 大きな水面変形を伴う構造物周辺の流れ解析(GBVC-FSV法)—自由水面渦度の生成と供給機構の導入, 土木学会論文集B1(水工学), Vol.73, No.4, pp.I-667-I-672, 2017.
- 6) 竹村吉晴, 福岡捷二, 日下部隆昭: 自由水面渦度を考慮した一般底面流速解析法(GBVC-FSV法)のバップルビアによる強制跳水への適用, 第20回応用力学シンポジウム, USBメモリー, C000123, 2017.
- 7) Hirt, C. W. and Nichols, B. D.: Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries, *Journal of Computational Physics*, Vol.39, pp.201-225, 1981.
- 8) Bayon, A., Valero, D., García-Bartual, R., Vallés-Morán, F. J. and López-Jiménez, P. A.: Performance assessment of OpenFOAM and FLOW-3D in the numerical modeling of a low Reynolds number hydraulic jump, *Environmental Modelling and Software*, Vol.80, pp.322-335, 2016.
- 9) Jesudhas, V., Balachandar, R., Roussinova, V. and Barron, R.: Turbulence characteristics of classical hydraulic jump using DES, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.144, No.6, pp.1-15, 2018.

- 10) Shakibaeinia, A. and Jin, Y.: MPS-based mesh-free particle method for modeling open-channel flows, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.137, No.11, pp.1375-1384, 2011.
- 11) Padova, D. D., Mossa, M., Sibilla, S. and Torti, E.: 3D SPH modelling of hydraulic jump in a very large channel, *Journal of Hydraulic Research*, Vol.51, No.2, pp.158-173, 2013.
- 12) Valero, D., Bung, D. B. and Crookston, B. M.: Energy dissipation of a type III basin under design and adverse conditions for stepped and smooth spillways, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.144, No.7, 04018036, 11p., 2018.
- 13) Carvalho, R. F., Lemons, C. M. and Ramos, C. M.: Numerical computation of the flow in hydraulic jump stilling basins, *Journal of Hydraulic Research*, Vol.46, No.6, 2008.
- 14) 荒木正夫, 椿東一郎: 水理学演習(下巻), pp.61-68, 森北出版, 1962.
- 15) Serre, F.: Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux, *La Houille Blanche*, Vol.8, No.12, pp.830-887, 1953 (in French).
- 16) Iwasa, Y.: Undular jump and its limiting conditions for existence, *Proceedings of the 5th Japan National Congress on Applied Mechanics*, Vol.2, No.14, pp.315-319, 1955.
- 17) Castro-Orgaz, O., Hutter, K., Giraldez, J. V. and Hager, W. H.: Nonhydrostatic granular flow over 3-D terrain: New Boussinesq-type gravity waves?, *Journal of Geophysical Research: Earth surface*, Vol. 20, No.1, pp.1-28, 2015.
- 18) Andersen, V. M.: Undular hydraulic jump, *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, Vol.104, No.8, pp.1185-1188, 1978.
- 19) Hager, W. H. and Hutter, K.: On pseudo-uniform flow in open channel hydraulic, *Acta Mechanica*, Vol.53, No.3-4, pp.183-200, 1984.
- 20) 細田尚, 多田彰秀: 鉛直加速度を考慮した基礎式系による開水路流れ定在波の水面形解析, 水工学論文集, Vol.38, pp.457-462, 1994.
- 21) Castro-Orgaz, O. and Chanson, H.: Near-critical free-surface flows: real fluid flow analysis, *Environmental Fluid Mechanics*, Vol.11, No.5, pp.499-516, 2011.
- 22) Montes, J. S.: A study of the undular jump profile, *9th Australasian Fluid Mechanics Conference*, Auckland, pp.148-151, 1986.
- 23) Castro-Orgaz, O., Hager, W. H. and Dey, S.: Depth-averaged model for undular hydraulic jump, *Journal of Hydraulic Research*, Vol.53, No.3, pp.351-363, 2015.
- 24) Narayanan, R.: Wall jet analogy to hydraulic jump, *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, Vol.101, No.3, pp.347-359, 1975.
- 25) McCorquodale, J. A. and Khalifa, A.: Internal flow in hydraulic jumps, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.109, No.5, pp.684-701, 1983.
- 26) 椿東一郎: 跳水現象の理論, 流體工學研究所報告, Vol.5, No.2, 九州大學流體工學研究所, pp.15-29, 1949.
- 27) Madsen, P. A. and Svendsen, I. A.: Turbulent bores and hydraulic jumps, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.129, pp.1-25, 1983.
- 28) Khan, A. A. and Stetler, P. M.: Physically based hydraulic jump model for depth-averaged computations, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.122, No.10, 1996.
- 29) 細田尚, Manoj Langhi: 簡易な水深積分モデルによる跳水部の水面形の再現解析について, 土木学会論文集 B1 (水工学), Vol.69, pp.I_883-I_888, 2013.
- 30) Ghamry, H. K. and Steffler, P. M.: Two dimensional vertically averaged and moment equations for rapidly varied flows, *Journal of Hydraulic Research*, Vol.40, No.5, pp.579-587, 2002.
- 31) 坂本洋, 重枝未玲, 秋山壽一郎: 準 3 次元洪水流モデルを用いた同規模河川合流点流れの数値解析, 土木学会論文集 B1 (水工学), Vol.68, No.4, pp.I_841-I_846, 2012.
- 32) 内田龍彦, 福岡捷二: 浅水流の仮定を用いない水深積分モデルによる底面流速の解析法, 土木学会論文集 B1 (水工学), Vol.68, No.4, pp.I_1225-1230, 2012.
- 33) 内田龍彦, 福岡捷二: 構造物を越流する流れの解析法の開発, 河川技術論文集, Vol.18, pp.351-356, 2012.
- 34) 内田龍彦, 福岡捷二, 福島琢二, 田中正敏: 大型粗度群上の浅い流れの平面二次元解析とその応用, 土木学会論文集, Vol.691, pp.93-103, 2001.
- 35) 内田龍彦: 粗面上に発生する跳水を含む段落ち部下流の流れの水深積分モデルによる解析法, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol.74, No.1, pp.17-26, 2018.
- 36) 内田龍彦, 福岡捷二: 非平衡粗面抵抗則を用いた一般底面流速解析法の導出と局所三次元流れへの適用, 土木学会論文集 B1 (水工学), Vol.71, No.2, pp.43-62, 2015.
- 37) Deigaard, R., Fredsøe, J. and Hedegaard, I. B.: Suspended sediment in the surf zone, *Journal of Waterway, Port, Coastal, Ocean Engineering*, Vol.112, No.1, pp.115-128, 1986.
- 38) 灘岡和夫, 田村仁, 八木宏, 二瓶泰雄: 準三次元浅水乱流モデルの開発に基づく三次元大規模渦構造の数値シミュレーション, 海岸工学論文集, Vol.47, pp.466-470, 2000.
- 39) 内田龍彦, 福岡捷二: 底面流速解法による連続する水没水制群を有する流れと河床変動の解析, 土木学会論文集 B1, Vol.67, pp.16-29, 2011.
- 40) 灘岡和夫, 大野修史, 栗原礼: 波動場の力学状態に基づく碎波過程の解析と碎波条件, 海岸工学論文集, Vol.43, pp.81-85, 1996.
- 41) 立山政樹, 福岡捷二, 石川俊之: 大規模洪水による河口砂州の開口機構に関する研究, 土木学会論文集 B1 (水工学), Vol.74, No.4, pp.I_715-I_720, 2018.
- 42) Engelund, F.: Flow and bed topography in channel bends, *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, Vol.100, No.11, pp.1631-1648, 1974.
- 43) 竹村吉晴, 福岡捷二, 杉村貴志: 三川合流部における洪水流と河床変動解析—格子非直交成分の運動量フラックスの導入, 土木学会論文集 B1(水工学), Vol.69, No.4, pp.I_805-I_810, 2013.
- 44) Gotoh, H., Yasuda, Y. and Ohtsu, I.: Effect of channel slope on flow characteristics of undular hydraulic jumps, *Transactions on Ecology and the Environment*, Vol.83,

- pp.33-42, 2005.
- 45) Chanson, H.: Characteristics of undular hydraulic jumps, *Research Report CE146, Department of Civil Engineering, The University of Queensland*, 1993.
- 46) Chacherea, Y. and Chanson, H.: Free-surface turbulent fluctuations and air-water flow measurements in hydraulics jumps with small inflow Froude numbers, *Report CH78/10, School of Civil Engineering, The University of Queensland*, 2010.
- 47) 後藤浩, 安田陽一, 大津岩夫: 波状跳水の形成条件に対するレイノルズ数・アスペクト比の影響について, *水工学論文集*, 第43巻, pp.299-304, 1999.
- 48) Ohtsu, I., Yasuda, Y. and Gotoh, H.: Hydraulic condition for undular-jump formations, *Journal of Hydraulic Research*, Vol.39, No.2, pp.203-209, 2001.
- 49) Ohtsu, I., Yasuda, Y. and Gotoh, H.: Flow conditions of undular hydraulic jumps in horizontal rectangular channels, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.129, No.12, pp.948-955, 2003.
- 50) 内田晃一, 石田征男, 小川彰一: コンクリート開水路の表面形状測定による粗度係数の評価, *農業農村工学会全国大会講演要旨集*, pp.432-433, 2008.
- 51) Chanson, H.: *Air Bubble Entrainment in Free-Surface Turbulent Shear Flows*, pp.22-24, Academic Press, 1996.
- 52) Hager, W. H.: *Energy Dissipators and Hydraulic Jump*, pp.13-18, Springer Science & Business Media, 1992.
- 53) Liu, M., Rajaratnam, N. and Zhu, D. Z.: Turbulence structure of hydraulic jumps of low Froude numbers, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.130, No.6, pp.511-520, 2014.
- (2018. 8. 2 受付)

ANALYSIS OF THE FLOW IN UNDULAR AND HYDRAULIC JUMP STILLING BASINS USING NON-HYDROSTATIC QUASI-THREE DIMENSIONAL MODEL CONSIDERING FLOW EQUATIONS ON BOUNDARY SURFACES

Yoshiharu TAKEMURA and Shoji FUKUOKA

This paper aims at development of a non-hydrostatic quasi-three dimensional model for the flow in undular and hydraulic stilling basins. It is challenging for the depth-integrated model to calculate the flow separation at boundary surfaces (water surface and bed surface). To solve this problem, a non-hydrostatic quasi-three dimensional model considering flow equations on boundary surfaces (Q3D-FEBS) was derived. Q3D-FEBS was applied to the undular and hydraulic jump experiments. The calculation results are in good agreement with the observation data such as water surface profiles and velocity distributions of the undular and hydraulic jump. Moreover, it was showed that Q3D-FEBS can calculate the breaking process of the undular jump and formation of the surface roller. Finally, the applicability of Q3D-FEBS for the flow in hydraulic jump stilling basins was discussed against observation data of a large scale hydraulic model experiment.