

# 底面流速解析法を用いた津波による構造物周りの三次元流れと局所洗掘解析

## Numerical Simulation on Three-Dimensional Flow and Local Scouring around a Structure due to Tsunami by the General Bottom Velocity Computation Method

内田龍彦<sup>1</sup>・福岡捷二<sup>2</sup>

Tatsuhiko UCHIDA and Shoji FUKUOKA

An integrated multi-scale numerical computation method is investigated for designing with the protection facilities in a tsunami hazard resistant city. This method is capable of calculating 3D flow and local scouring around a protection facility by the large scale tsunami propagation. The paper demonstrates application capability of a quasi-3D flow model presented herein, the general Bottom Velocity Computation (BVC) method, considering that there are large gaps of computational costs and abilities between 2D and 3D numerical models. The BVC method is based on depth integrated model without the assumption of shallow water flow. This paper presents simulation results on 3D flow structures and local scouring around structures due to the tsunami inundation flow. The importance for considering 3D flow for tsunami simulations is discussed though the comparison between the BVC and 2D methods.

### 1. 序論

東日本大震災を受けて、改めて災害には上限がないことが認識されるようになり、将来の津波被害をできる限り軽減する津波防災まちづくりのために、従来の海岸保全施設等の線による防御から、河川、道路、土地利用規制などを組み合わせた面の防御対策が求められている(国土交通省, 2011)。今回、仙台東部道路が津波被害を軽減したように、津波防災まちづくりにおいて、盛土構造物の役割は大きい。このような津波防護施設を活用、設計するためには、構造物が津波に対してどのように作用するのかとともに、津波に対する構造物の耐性を明らかにすることが重要である。

津波に対する構造物の耐性を明らかにするためには、断層モデルを含む広域の解析から、構造物周辺の局所三次元流れ、流体力、局所洗掘を一体的に解析することが求められる。従来、津波伝播の数値解析には浅水流方程式が用いられてきた(首藤ら, 2007)。浅水流方程式では波の分裂が考慮できないため、これまでにBoussinesq方程式に基づく津波の数値計算法が提案されている(佐藤, 1995; 岩瀬ら, 1998)。これらの解析法は二次元解析法であるため、広域の津波伝播を扱える半面、鉛直方向の流速分布等の変形が考慮できないため、構造物周辺の局所流や洗掘を計算するには十分でない。正村ら(2001)は構造物周辺などの三次元性が重要となる箇所には非静水圧分布の三次元解析、その外側の部分は平面二次元解析を行うハイブリッド型の津波解析法を開発して

いる。ネスティングと同様に必要な箇所の計算精度を向上させるハイブリッド解析は合理的であり、工学的に有効な手法であるが、二次元・三次元のハイブリッド計算では両者の数値計算方法が異なることと計算負荷の大きな差のために、接続部の評価方法が複雑となる点に課題があるように思われる。また、平面二次元解析法と三次元解析法の適用範囲にもギャップがある(内田・福岡, 2012)ため、二次元と三次元解析を接続することは困難であると考えられる。特に、地盤高の変動解析では両者のギャップは大きく、水深スケールの100倍程度の大きな現象に対しても三次元解析法を適用しなくてはならなくなる問題が生じる。このように、平面二次元解析法と三次元解析法は、計算負荷・計算能力に大きなギャップがあり、これを埋めるためには準三次元解析法が求められる。

流速鉛直分布の変形を考慮できる準三次元解析法は、主として河道湾曲部・蛇行部を対象として検討されてきた(石川ら, 1986; 福岡ら, 1992; Jin & Steffler, 1993; Yeh & Kennedy, 1993)。灘岡ら(2000)は湾口部における水平大規模渦に伴う三次元構造と浮遊砂の挙動のための準三次元解析法を開発している。しかし、これらの準三次元解析法はいずれも静水圧分布が仮定されており、河川構造物近傍の局所流や局所洗掘解析に適用するには課題がある。また、津波・津波氾濫流に適用するためには、常・射流、ドライ・ウェット混在の流れの解析が必要となり、このような厳しい解析条件において、構造物周辺の局所流・局所洗掘解析に適用可能な非静水圧準三次元解析法は著者らの知る限り存在しない。

著者らは静水圧分布等の浅水流の仮定を用いない準三次元解析法である一般底面流速解析法(BVC法)を開発

1 正会員 博(工) 中央大学研究開発機構准教授  
2 フェロー PhD工博 中央大学研究開発機構教授

し、河川における橋脚周辺の馬蹄形渦を伴う三次元的な流れ、構造物を越流する急変流れ・下流の跳水や橋脚周りや複断面蛇行流路の三次元的な渦構造とそれによる河床変動が説明できることを示してきた(内田・福岡, 2012a, 2012b, 2013; Fukuoka & Uchida, 2013). BVC法は、広域の津波伝播解析にも適用可能な水深積分モデルであり、流速鉛直分布や圧力分布が評価できるため、津波伝播と津波による構造物周辺の局所流と局所洗掘解析の一体解析が可能と考えられる。本研究では、津波防災まちづくりを支える実用的な解析法の構築を目指し、広域の津波伝播と構造物の周りの局所流れを一体的に解くことの必要性を示し、その第一ステップとして、津波流れと局所洗掘の解析法を構築し、これを単一の構造物が存在する場合に適用し検討している

2. 解析方法

(1) 基礎方程式

過度の定義式を水深積分すると式(1)の底面流速方程式が得られる。

$$u_{bi} = u_{si} - \varepsilon_{ij3} \Omega_j h - \frac{\partial W h}{\partial x_i} + w_s \frac{\partial z_s}{\partial x_i} - w_b \frac{\partial z_b}{\partial x_i} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $u_{bi}$  : 底面流速,  $u_{si}$  : 水表面流速,  $\varepsilon_{ijk}$  : Levi-Civita記号,  $\Omega_j$  : 水深平均渦度,  $h$  : 水深,  $W$  : 水深平均鉛直方向流速,  $z_s, z_b$  : 水面, 地盤高,  $w_s, w_b$  : 水面, 底面の鉛直方向流速である。BVC法では、式(1)を用いて底面流速を評価し、流速鉛直分布関数を決定する。このために、通常の場合二次元解析法で解かれる水深積分連続式(2)、水深積分水平方向運動方程式(3)、水深積分乱れエネルギー輸送方程式(4)に加え、水深積分過度方程式(5)、水表面流速運動方程式(6)、水深平均鉛直方向流速の時間変化の式(7)が解かれる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial U_j h}{\partial x_j} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial U_j h}{\partial t} + \frac{\partial U_j U_j h}{\partial x_j} = -gh \frac{\partial z_s}{\partial x_i} - \frac{\partial h d p_0}{\rho \partial x_i} - \frac{d p_b}{\rho \partial x_i} \frac{\partial z_b}{\partial x_i} - \frac{\tau_{bi}}{\rho} + \frac{\partial h \tau_{ij}}{\rho \partial x_j} \dots (3)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( v h \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + P_k - \varepsilon \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{\partial \Omega_i h}{\partial t} = E R_{\sigma i} + P_{\omega i} + \frac{\partial h D_{\omega ij}}{\partial x_j} \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{\partial u_{si}}{\partial t} + u_{sj} \frac{\partial u_{si}}{\partial x_j} = -g^* \frac{\partial z_s}{\partial x_i} + P_{si} \dots\dots\dots (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( (C \Delta t)^2 \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + \phi^p - \phi = 0 \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $g$  : 重力加速度,  $dp$  : 静水圧分布からの偏差圧力 ( $dp = P - \rho g(z_s - z)$ ,  $P$  : レイノルズ応力の等方成分と圧力の和),  $dp_b, dp_0$  : 底面, 水深平均の圧力偏差,  $\tau_{ij}$  : レイノルズ応力の非等方成分と流速鉛直分布による

水平応力テンソル,  $\tau_{bi}$  : 底面せん断応力,  $P_k$  : 乱れエネルギーの生産項,  $\varepsilon$  : 乱れエネルギーの散逸率 ( $\varepsilon = C_\varepsilon k^{3/2} / \Delta$ ,  $C_\varepsilon h / \Delta = 1.7$ ),  $E R_{\sigma i} = u_{si} \omega_{s\sigma} - u_{bi} \omega_{b\sigma}$ ,  $\omega_{s\sigma}, \omega_{b\sigma}$  :  $u_{si}, u_{bi}$ の回転,  $P_{\omega i}$  : 渦度生産項,  $D_{\omega ij}$  : 移流, 回転, 乱流拡散による渦度フラックス,  $g^*$  : 水面の鉛直方向圧力勾配,  $P_{si}$  : 水表面流速生産項 (水面のごく薄い層の下面に作用するせん断応力),  $\phi = (Wh)^{n+1} - (Wh)^n$ ,  $(Wh)^{n+1}, (Wh)^n$  :  $n+1, n$ ステップにおける鉛直方向流速の水深積分値,  $\phi^p = (Wh)^p - (Wh)n$ ,  $(Wh)^p$  : 鉛直方向流速の予測値,  $C = k_1 h / \Delta t$ ,  $k_1 = 1/20$ ,  $\Delta t$  : 計算時間間隔である。 $(Wh)^p$ は  $(Wh)^n$ を用いて評価した流速鉛直分布から連続式より計算される。水平方向流速の鉛直分布は式(8)、過度の鉛直分布は式(8)の鉛直方向の微分で与え、これを用いて流速・過度の鉛直分布の相関項、乱れエネルギー・水表面流速の生産項、底面過度(過度の生産項)を求める(内田・福岡, 2011)。

$$u_i' = u_i - U_i = \Delta u_i (12\eta^3 - 12\eta^2 + 1) - \delta u_i (4\eta^3 - 3\eta^2) \dots (8)$$

ここに、 $\Delta u_i = u_{si} - U_i$ ,  $\delta u_i = u_{si} - u_{bi}$ である。また、水面勾配の変化量によって碎波条件を定めており、碎波点においては過度を供給、水面流速の不連続条件、圧力の絶対値が正となる制限を与えている(内田・福岡, 2012b)。

式(3)の底面圧力偏差は鉛直方向運動方程式を水深積分することにより、次式が得られる。

$$\frac{d p_b}{\rho} - \tau_{bj} \frac{\partial z_b}{\partial x_j} = \frac{\partial h W U_j}{\partial x_j} \dots\dots\dots (9)$$

ここで、式(9)では鉛直方向流速の非定常項とレイノルズ応力と鉛直方向流速・水平方向流速の鉛直分布による応力項が省略されている。後者については導入前後でほとんど差が見られなかったが、前者については式(7)により解かれる鉛直方向流速の時間変化項を用いて評価すると計算が発散するために省略されたものである。しかし、この項はBoussinesq方程式の分散項の一部であり、この項の評価方法と津波解析に及ぼす影響評価は今後の課題である。水深平均圧力については、鉛直方向の運動方程式を二重積分し、簡略化した式(10)で与える。また、式(6)の鉛直方向の圧力勾配については、圧力偏差の二次曲線を仮定して、式(11)で与える。

$$\frac{d p_0}{\rho} = \frac{d p_b}{2} - \overline{w w_\sigma} \dots\dots\dots (10)$$

$$g^* = g - \left( \frac{\partial d p}{\partial z} \right)_{z=z_s} = g - \frac{2 d p_b - 6 d p_0}{h} \dots\dots\dots (11)$$

ここに、式(10)の右辺第二項は鉛直方向の運動量交換量であり、ここでは連続式と式(8)から、次式で与える。

$$\overline{w w_\sigma} = a \left( \frac{\partial h \Delta u_k}{\partial x_k} \right)^2 + b \left( \frac{\partial h \Delta u_i}{\partial x_i} \right)^2 + c \left( \frac{\partial h \Delta u_k}{\partial x_k} \right) \left( \frac{\partial h \Delta u_j}{\partial x_j} \right) \dots (12)$$

ここに、 $a = 8/105$ ,  $b = 1/252$ ,  $c = 41/140$ である。

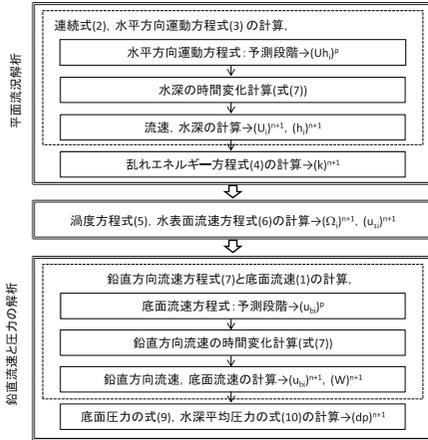


図-1 一般底面流速解析法 (BVC法) の数値計算方法の概略

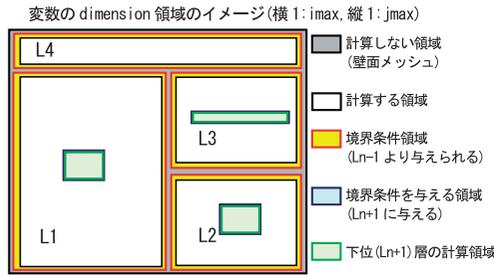


図-2 ネスティング計算のための変数領域における各層の配置と情報交換の方法

(2) 数値解析法

図-1にBVC法の概略を示す。計算は時間前進で進められ、大きく通常の二次元解析と同様の平面流況解析、流速鉛直分布に関わる渦度方程式と水表面流速の解析、及び鉛直流速と圧力の解析に分けられる。平面流況解析では、津波氾濫流の常・射流、ドライ・ウェット混在の厳しい流れを解析するために非圧縮性流体解析のSMAC法が応用されている。即ち、式(2)の $U_h$ 、式(3)の水面勾配の項を次の時間ステップの値を用いて計算する。この時、水深の時間変化量は、 $\phi = h^{n+1} - h^n$ 、 $C^2 = gh$ とした式(7)で表される(内田・福岡, 2013)。 $\phi^p$ は、運動方程式において $h^n$ を用いて水面勾配を評価した場合の $U_h$ の予測値を計算し、さらにこれを用いて連続式から計算される水深の時間変化の予測値である。運動方程式の離散化は、移流項には保存型CIP法(Nakamura et al., 2001)、時間微分項には一次精度の前進差分、その他の項には二次精度の中央差分が用いられている。渦度方程式、水表面流速方程式は、移流項には一次精度の風上差分、その他の項には二次精度の中央差分を用い、一次精度の前進差分を用いて次ステップの値を計算している(内田・福岡, 2011)。鉛直流速と圧力の計算は、浅水流の仮定を用い

ない場合に必要であり、式(10)の右辺第二項を導入した以外、内田・福岡(2012a)と同様の方法で計算する。

波源域を含む広域スケールから構造物周辺の局所スケールの解析が必要な津波解析では一般にネスティング手法が用いられる。自由表面を含む流れの計算では、格子解像度が水深スケールに近づくにつれて流れの三次元性が重要となってくる(内田・福岡, 2012a)。BVC法では、複数の方程式を連立させることにより、このようなスケールの異なる流れを一つの方程式系で解析できることに利点がある(Fukuoka & Uchida, 2013)。本研究では既存のプログラムを簡便にネスティング手法に応用するために、図-2のように各変数のメモリ領域において、各計算領域の計算メッシュデータを配置した。本研究では格子サイズが $n$ 番目に大きいものを、 $L_n$ 層メッシュと呼び、数字が小さい方を上位、大きい方を下位層とする。下位層メッシュの計算において、上位層の情報を境界のみで受けるネスティング手法では、境界条件に高周波成分が反映されていないため、反射波が発生する等の問題が指摘されている(二瓶ら, 2003)。図-2のような変数配置は各層の時間ステップが同じときに有効であるため、下位層と上位層が相互に影響する2wayネスティングに適しているが、ここでは簡便のため、計算各時間ステップで下位層の格子の境界領域の変数のみを修正する(1way)ことにした。また、水深、鉛直方向流速は、式(7)のポアソン型方程式から計算されるため、厳密には式(7)の繰り返し計算において境界値を修正する必要があるが、ここでは簡単のため固定している。このようにネスティング手法としては最も簡便な手法を用いており、本手法の適用性についてはさらに検討する必要がある。

(3) 解析条件

津波の初期水位は、東北大学モデルにより与える(今村ら, 2011)。格子スケール比は3とし、7種類の計算メッシュ(最小5m)を用いる。広域の計算領域の地盤高は財団法人日本水路協会海洋情報研究センター刊行の日本近海30秒グリッド水深データ第二版を使用した。構造物周辺の詳細な地盤データには仙台市数値地図5mメッシュデータ(国土地理院, CD-ROM)を使用した。構造物は非水没の鉛直壁を有する単純化されたもの(長さ100m、幅20m)で、海岸線からの距離が0.6km(Case1)において、海岸線となるべく平行になるように配置された場合と、津波氾濫解析に及ぼす海岸からの距離の影響を調べるため、海岸から2.5km(Case2)に設置した場合の計算も行い、Case1と比較する。構造物は長さ100m、幅20mとし、非水没の鉛直壁を有している。地盤高の変動解析には $d = 0.1\text{mm}$ の一樣砂を用い、非平衡流砂量式(内田・福岡, 2011)を用いて地盤高の変動解析を行う。地盤高の変動解析は $L7$ 計算のみとしている。

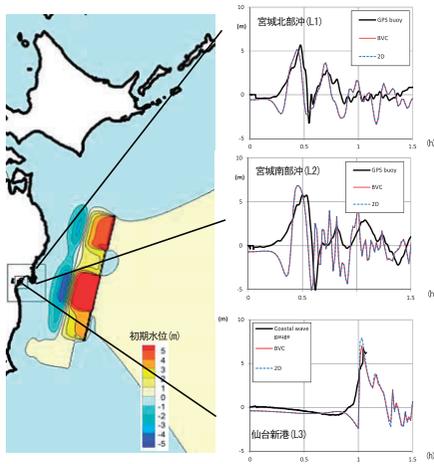


図-3 水位観測点における解析結果と観測結果の比較

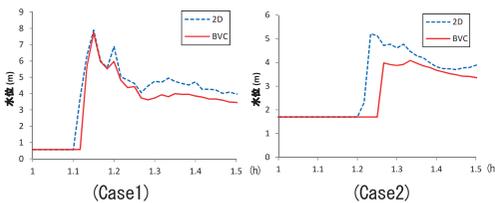


図-4 BVC法と二次元解析法による氾濫域の構造物前面の水位の時間変化の比較

### 3. 解析結果と考察

図-3に波源域を含む広域の解析の沿岸部 (L1) から湾内 (L3) の計算領域における水位観測結果と解析結果の比較を示す。水位観測結果は国土交通省港湾局によって観測され、港湾空港技術研究所で処理されたものである。解析結果と観測結果の波形は時間が経つに連れて差異が大きくなっているが、津波到達時刻とピーク水位は概ね再現できている。湾内の仙台新港 (L3) では、BVC法の計算結果は二次元解析法に比べてピーク水位が低くなっている。これは水位変化の一部が圧力変化となったためと考えられるが、その差はわずかであり、本解析条件では湾内を含め、沿岸域の水位波形に流れの三次元性はほとんど影響しない。図-4に氾濫域の構造物前面 (L7) におけるBVCと二次元解析結果の水位変化の比較を示す。今回の解析では二次元解析法で計算した場合がBVC法の場合よりも水位が高く、氾濫到達時間が早くなった。海岸からの距離が離れているCase2では、両者の差が大きくなる。これはFr数が大きく、流れの性質が現れる陸域の解析においては圧力の非静水圧成分や流れの三次元性による運動量交換が抵抗として働くためと考えられる。このような抵抗の増大は二次元解析法では底面粗度係数などで考慮することになる。本解析条件では建物群や構造物を考慮していないが、これらの影響を考慮すれば両

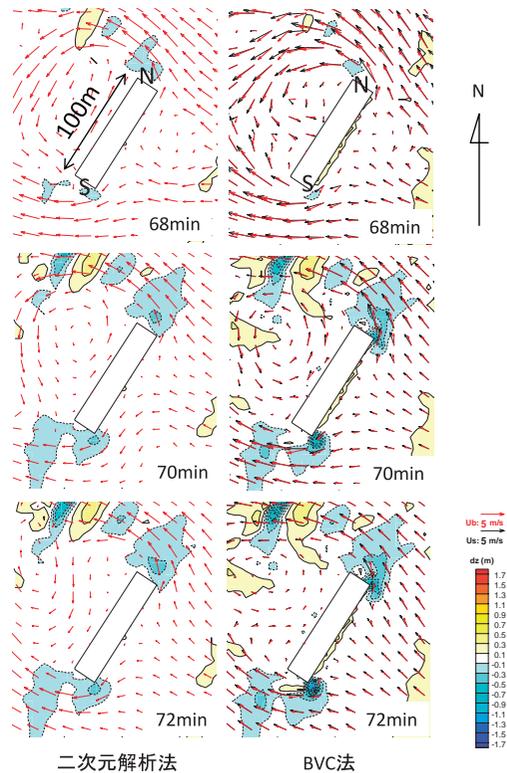


図-5 BVC法と二次元解析法による構造物前面の水位の時間変化の比較 (Case1, L7: 破線の等高線は洗掘, 実線の等高線は堆積を表す)

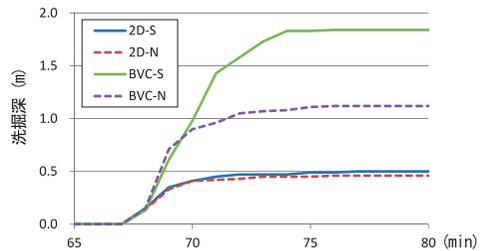


図-6 構造物前面の洗掘深さの時間変化の比較 (Case1, L7)

者の差はさらに大きくなると考えられるため、津波氾濫流の抵抗評価には流れの三次元性を考慮することが重要と考えられる。

図-5に構造物周りの洗掘の様子と水表面流速 (BVC法のみ)、底面流速ベクトル、図-6に構造物周りの洗掘深の時間変化を示す。ここで、図-5に示すように北側と南側の洗掘孔をそれぞれN,Sとしている。BVC法では津波が通過する間に構造物の角で急激に洗掘が発達しているが、二次元解析法ではほとんど洗掘していない。図-5より、構造物前面において馬蹄形渦により、水表面流速に比べて底面流速が構造物から離れる向きに曲げられており、津波による洗掘計算においても、流れによる洗掘計

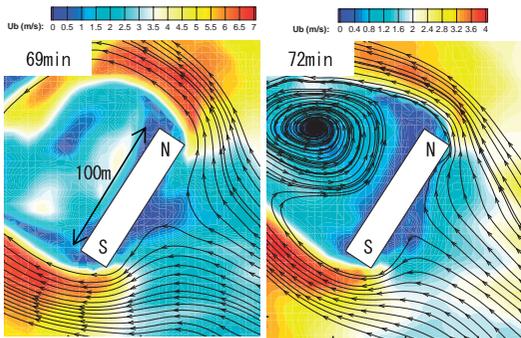


図-7 津波の向きによる馬蹄形渦の変化（各時間の底面流速の流線, Case1, L7）

算と同様に流れの三次元性が重要であり、二次元解析法では不十分であると言える。図-6においてBVC法における洗掘孔N,Sの発達過程を見ると、70minまではほぼ同じように発達しているが、それ以降では洗掘Sのみが発達している。図-7に69min, 72minにおける底面流速の流線と底面流速の大きさを示す。洗掘孔S,Nの洗掘孔の発達がほぼ同様である69minでは津波は構造物にほぼ垂直であり、底面流速の流線が構造物の手前で曲げられており、S,N側両方で馬蹄形渦が発達していることが分かる。一方、洗掘孔Sのみが発達している72minでは津波の方向はやや南側からに偏向し、底面流速の流線はS側では大きく曲げられているが、N側では構造物に沿っており、馬蹄形渦がS側に偏って発達していることが分かる。図-7から、底面流速の大きさは69minから72minでかなり小さくなっているにもかかわらず、洗掘孔Sは発達し続けている。これは、短い辺に衝突する方が渦の伸長が大きく、馬蹄形渦が発達しやすいためである。このことから、津波による構造物周辺の洗掘の発達は、津波の向きと構造物の形によって大きく変化することから、津波による構造物の耐性を検討するためには、広域の津波伝播から構造物周りの局所流までを一体的に解析する必要があると言える。

#### 4. 結論

本研究では浅水流の仮定を用いない準三次元解析法であるBVC法を応用し、津波による構造物周りの流れと局所洗掘解析法を行った。本研究で得られた主要な結論を以下に示す。

- (1) 本解析条件では広域の津波の伝播には流れの三次元性はほとんど影響しなかったが、氾濫域の津波の伝播では二次元解析法とBVC法の解析結果に明確な差が生じた。また、津波による構造物周りの洗掘解析を行うためには二次元解析法では不十分であり流れの三次元性を考慮する必要があることを示した。
- (2) 構造物周りの洗掘は、津波通過時に急激に生じる。接近する津波の向きと構造物の形の関係によって馬蹄

形渦の発達の仕方は大きく異なるため、洗掘箇所、大きさを解析するためには、広域の津波伝播と構造物周りの局所流れを一体的に解く必要があることを示した。

#### 参考文献

- 石川忠晴, 鈴木研司, 田中昌宏(1986): 開水路流の準三次元法に関する基礎的研究, 土木学会論文集, No.375/II-6, pp.181-189.
- 今村文彦, 越村俊一, 大家隆行, 馬淵幸雄, 村嶋陽一(2011): 東北地方太平洋沖地震を対象とした津波シミュレーションの実施 東北大学モデル(version1.0), 東北大学大学院工学研究科附属災害制御研究センター, <http://www.tsunami.civil.tohoku.ac.jp/hokusai3/J/>, 参照2013-05-10.
- 岩瀬浩之, 見上敏文, 後藤智明(1998): 非線形分散波理論を用いた実用的な津波計算モデル, 土木学会論文集, No.600/II-44, pp.119-124.
- 内田龍彦, 福岡捷二(2011): 底面流速解析による連続する水没水制層を有する流れと河床変動の解析, 土木学会論文集 B1 Vol. 67, No. 1, pp.16-29.
- 内田龍彦, 福岡捷二(2012a): 浅水流の仮定を用いない水深積分モデルによる底面流速の解析法, 土木学会論文集B1(水工学), Vol.68, No.4, I\_1225-I\_1230.
- 内田龍彦, 福岡捷二(2012b): 構造物を越流する流れの解析法の開発, 河川技術論文集, 第18巻, pp.351-356.
- 内田龍彦, 福岡捷二(2013): 浅水流の仮定を用いない水深積分モデルによる種々な小規模河床形態の統一的解析法の構築, 土木学会論文集B1(水工学), Vol.69, No.4, I\_1135-I\_1140.
- 国土交通省(2011): 津波防災まちづくりの考え方, 社会資本整備審議会・交通政策審議会交通体系分科会 計画部会, [www.mlit.go.jp/common/000149628.pdf](http://www.mlit.go.jp/common/000149628.pdf), 参照2013-05-10.
- 佐藤慎司(1995): 波の分裂と砕波を考慮した津波の数値計算, 海岸工学論文集, 第42巻, pp.376-380.
- 首藤伸夫, 越村俊一, 佐竹健治, 今村文彦, 松富英夫(2007): 津波の辞典, 朝倉書店.
- 福岡捷二, 渡辺明英, 西村達也(1992): 水制工の配置法の研究, 土木学会論文集, No.443/II-18, pp.27-36.
- 灘岡和夫, 田村 仁, 八木 宏, 二瓶泰雄(2000): 準三次元浅水流モデルの開発に基づく三次元大規模渦構造の数値シミュレーション, 海岸工学論文集, 第47-1巻, pp.466-470.
- 二瓶泰雄, 佐藤慶太, 灘岡和夫, 熊野良子, 西村 司(2003): 沿岸海水流動シミュレーションに対する新しい多重ネスティング計算法の開発, 土木学会論文集, No.740/II-64, pp.171-183.
- 正村憲史, 藤間功司, 後藤智明, 飯田邦彦, 重村利幸(2001): 2次元・3次元ハイブリッドモデルを用いた津波の数値解析, 土木学会論文集, No.670/II-54, pp.49-61.
- Fukuoka, S. and Uchida, T. (2013): Toward integrated multi-scale simulations of flow and sediment transport in rivers, Journal of JSCE, Ser.B1 (Hydraulic Engineering), Vol. 69, No. 4, II\_1-II\_10, 2013.
- Jin, Y.-C. and Steffler, P. M. (1993): Predicting flow in curved open channels by depth-averaged method, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.119, No.1, pp.109-124.
- Nakamura, T., Tanaka, R., Yabe, T. and Takizawa, K.(2001): Exactly Conservative Semi-Lagrangian Scheme for Multi-dimensional Hyperbolic Equations with Directional Splitting Technique, J. Comput. Phys., Vol.174, pp.171-207.
- Yeh, K.-C. and Kennedy, J. F. (1993): Moment model of nonuniform channel-bend flow. I: fixed beds, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.119, No.7, pp.776-795.