水工学論文集,第56巻,2012年2月

水表面流速方程式を付加した底面流速解析法の開発と河川合流部への適用

A BOTTOM VELOCITY COMPUTATION METHOD WITH WATER SURFACE VELOCITY EQUATION FOR FLOWS AROUND A RIVER CONFLUENCE

輿石　大[1]・内田龍彦[2]・福岡捷二[3]
Masaru KOSHIISHI, Tatsuhiko UCHIDA and Shoji FUKUOKA

[1]学生会員　中央大学大学院　理工学研究科　土木工学専攻（〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27）
[2]正会員　博(工)　中央大学研究開発機構准教授（〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27）
[3]フェロー　工博　Ph.D　中央大学理工学部特任教授，中央大学研究開発機構教授
（〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27）

Complex three-dimensional flows around river confluences are characterized by the secondary flow as well as primary flow, and it also causes intense local scouring and deposition. So, numerical simulation models which include effects of three-dimensional flows are required to calculate flows around a river confluence.

In this study, first, we evaluate reproducibility of several functional forms describing vertical velocity distributions of flows around a river confluence by using measured data by Rhoads et al.(1995). Second, we develop a bottom velocity computation method with water surface velocity equation using the general coordinate system. And then, the validity of the model is discussed through the comparison with the measured results.

Key Words : *river confluences, secondary flow, quasi-3D analysis ,vorticity equation , water surface velocity equation, vertical velocity distribution*

1．序論

本川と支川の二つの流れが角度を持って合流する箇所では，遠心力に起因する二つの対になる二次流等により，複雑な三次元流れとなることが知られている[1)]．また，合流部付近では局所洗掘や土砂堆積といった河道管理上の問題が生じる．合流部の流れは，よどみ点，偏向域，剥離域，最大流速域，流線の回復域，せん断層の六つの要素に分類され[2)]，これらの合流部の流れの特徴は，合流角や流量比によって変化する[3)]．実河川における洪水時の流れは，流量ハイドログラフの関係により合流部の流量比が大きく変化するため，二次流強度や洗掘・堆積箇所が場所的・時間的に複雑に変化する．このため，河川合流部の流れの解析には，流れの三次元性を考慮できる解法[4)~9)]が必要である．Miyawakiら[4)]はLESとRANSを組み合わせた三次元解析法(Detached Eddy Simulation)を小河川におけるRhoadsらの観測データ[10)]に適用し，遠心力二次流や流れの混合境界に生じる水平渦を解像することで流れ場を高精度で再現出来ることを示した．さらに，混合境界に生じる強い水平渦が流れの構造に重要な役割を果たしていることを明らかにするなど，貴重な成果を得ている．近年の計算機の高速化により高精度の三次元解析が行われるようになってきたが[4),5)]，実河川における洪水流解析に適用するには計算負荷の面から実用的ではなく，また，洪水中の河床形状や，低水路・高水敷の粗度分布等の入力条件が不確かであることから，高精度な計算が実行されても得られる結果には限界があるものと考えられる．これらの考え方から，合流部の実用的な解析法として準三次元解析法の研究がなされてきた[6)~9)]．内田・福岡は水深積分運動方程式に加えて，渦度の輸送方程式を解くことで，平面二次元解析の枠組みにおいて流れの三次元性を考慮した解析法（底面流速解析法）を検討してきた[6),9)]．また，実河川の洪水流・河床変動解析のために一般座標系の底面流速解析法を開発し，多くの河川で検討してきた[11),12)]．しかし，流速鉛直分布を渦度と流速の水深積分値で表す解析法[6),11),12)]では，底面流速と水表面流速が流速鉛直分布関数に直接的に依存する課題があり，また，合流部等の複雑な流れ場における流速鉛直分布の評価法については十分に検討されていない．

そこで，本研究ではまず，実河川合流部で測られた実

測データ[10]を用いて，流速鉛直分布の評価法とその精度について考察する．次に，水表面流速方程式を付加した一般座標系の底面流速解析法を開発し，実河川合流部の実測データ[10]に適用し，検証する．

2．流速鉛直分布関数の評価法と精度の検討

本章では底面流速解析法[6),9)]や重み付残差法による準三次元解析法[7),8)]で仮定される流速鉛直分布関数が合流部の実測流速分布データ[10]に対してどの程度再現性を有するかを検証する．検討対象はRhoadsら[10]により流速分布や粒度分布等が調査された**図-1**に示すアメリカ，イリノイ州を流れるKASKASKIA RIVER(KR)と，その支川であるCOPPER SLOUGH(CS)の合流地点である．観測で得られた水理量は**表-1**に示す．

(1) 検討方法

底面流速解析法では式(1)の二次多項式[6),11),12)]，あるいは式(2)で示す三次多項式[9]で流速鉛直分布を仮定する．未知量は水深平均流速U_i，水表面と底面の流速差δu_i(=$u_{si}-u_{bi}$)に加えて，三次多項式(2)では水表面流速u_{si}である．底面流速解析法では，水面で速度勾配ゼロの条件が与えられている[6),9)]．一方，重み付残差法では式(3)のフーリエ級数，もしくは式(4)の多項式で流速鉛直分布が仮定されることが多く[7),8)]，未知量は右辺各項のu_{ni}である．

$$u_i(\eta)=U_i+\frac{\delta u_i}{3}\left(1-3\eta^2\right) \tag{1}$$

$$u_i(\eta)=U_i+\Delta u_i\left(12\eta^3-12\eta^2+1\right)-\delta u_i\left(4\eta^3-3\eta^2\right) \tag{2}$$

$$u_i(\eta)=\sum_{n=1}^{N}u_{ni}\cos n\pi\eta \qquad (n=0,1,\cdots,N) \tag{3}$$

$$u_i(\eta)=\sum_{n=1}^{N}u_{ni}\eta^n \qquad (n=0,1,\cdots,N) \tag{4}$$

ここに，i=1,2(x,y方向)，u_i：i方向流速，U_i：i方向水深平均流速，$\Delta u_i=u_{si}-U_i$，$\delta u_i=u_{si}-u_{bi}$，u_{si}：i方向水表面流速，u_{bi}：i方向底面流速，u_{ni}：i方向流速分布に関する未知量，$\eta=(z_s-z)/h$，z：基準面からの高さ(鉛直上向きを正)，z_s: 水位，h：水深である．これらの未知量はそれぞれの基礎方程式の数値解析より求められる．底面流速解析法では，水深積分した運動方程式・渦度方程式，三次多項式では水表面流速方程式が加わる．重み付残差法では，未知量u_{ni}の数に等しいN本の流速鉛直分布に関する偏微分方程式である．解析結果に含まれる誤差には，流速鉛直分布関数の仮定や基礎方程式を導出する際に行った仮定等の要素が含まれる．ここでは，基礎方程式を解かずに未知量を実測データより直接与え，流速鉛直分布関数の再現精度を検証する．底面流速解析法では水深平均流速，水表面と底面の流速差，水表面流速の計測値を与える．重み付残差法では，重みを乗じた残差を領域でゼロとして導かれる未知量に関する偏微分方程式を解くため，実測データに対しても同様の考え方を用いればN次の連立方程式(5)が得られる．

表-1 観測時水理条件

1992年3月20日	Q	M	A	V	D
KR	0.29	46.90	1.83	0.16	0.27
CS	0.51	170.60	1.53	0.33	0.20

Q:流量(m^3s^{-1}),M:運動量フラックス($kgms^{-2}$)
A:断面積(m^2),V:水深平均流速(ms^{-1}),D:平均水深(m)

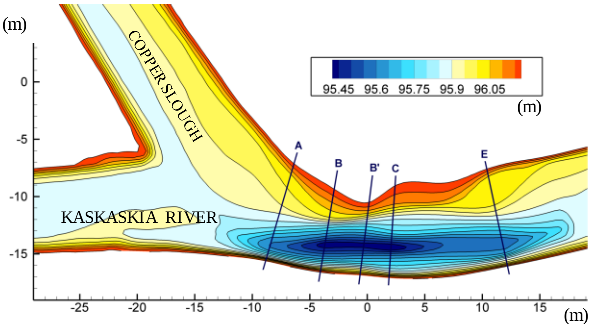

図-1 解析地形・流速測定断面

$$\int_1^0 u_{ex\,i}(\eta)\cdot\chi_n d\eta=\int_1^0 u_{ap\,i}(\eta)\cdot\chi_n d\eta \qquad (n=0,1,\cdots,N) \tag{5}$$

$$u_{ap\,i}(\eta)=\sum_{n=1}^{N}u_{n\,i}\psi_n,\ \ \psi_n=\begin{cases}\cos n\pi\eta & (\text{フーリエ級数})\\ \eta^n & (\text{多項式})\end{cases} \tag{6}$$

ここに，u_{ex}:実測値，u_{ap}:近似値，ψ_n：形状関数，χ_n：重み関数である．重み関数にはガラーキン法と同様に形状関数を用いる．これは，実測データの近似曲線を求める手法である最小二乗法と一致する．本研究ではこの連立方程式を解くことで重み付残差法の未知量u_nを求めている．

(2) 流速鉛直分布関数による合流部流れの再現精度

図-2には合流部断面CのⅠ・Ⅱ・Ⅲ(**図-7**)における主流速と二次流速の鉛直分布をそれぞれ示す．底面流速解析法では，二次多項式(1)で自由度が2であり，三次多項式(2)で自由度が3である．また，重み付残差法の自由度は式(3)，式(4)よりN+1である．流速鉛直分布が比較的単純な箇所(**図-2上段Ⅲ**)では，二次多項式で概ね分布を再現出来る様である．しかし，他と比べ二次多項式の底面流速解析法では若干精度が低いようである．これは，底面流速解析法では重み付残差法と比べ自由度が一つ少ないためであると考えられる．流速鉛直分布が複雑なその他の箇所では，三次多項式の底面流速解析法は精度が若干低いものの，概ね流速鉛直分布形を説明出来る．解析における計算負荷は基礎方程式の数(自由度)に依存するため，以降は等しい自由度で各関数形を比較する．**図-3上段**には各関数形の自由度と実測との誤差の関係を示している．ここで，実測との誤差は以下の$S(u'_i)$で定義している．

$$S(u'_i)=\sqrt{R(u'_i)}\,/\,U_A \tag{7}$$
$$R(u'_i)=\sum\nolimits_A r(u'_i)/n \ \ ,\ \ r(u'_i)=\sum\nolimits_h\left(u_{ap\,i}-u_{ex\,i}\right)^2/m$$

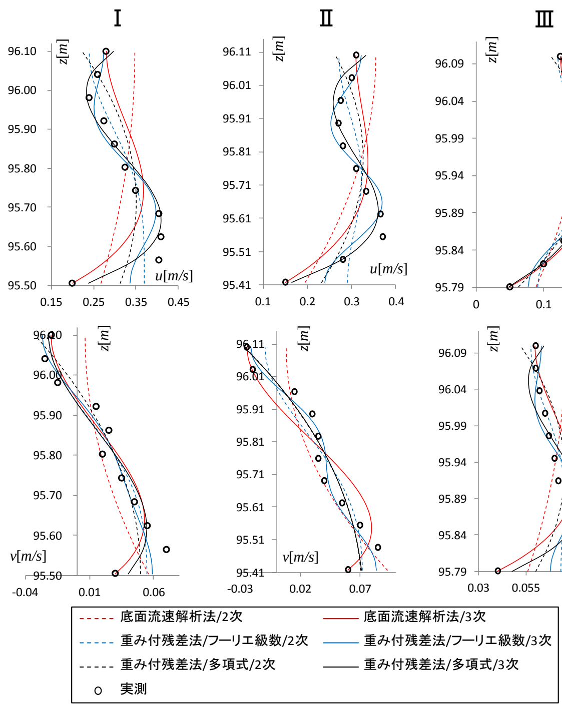

図-2 合流部　各関数形の比較(上段:主流, 下段:二次流)

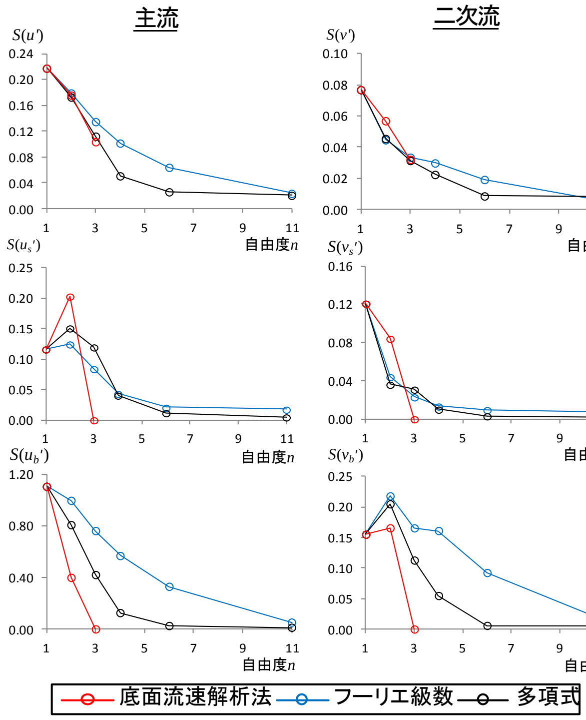

図-3 合流部　各関数形の自由度と誤差

(上段:分布平均, 中段:水表面流速, 下段:底面流速)

ここに，U_A：断面平均流速，$r(u'_i)$：水深方向の残差二乗和，$R(u'_i)$：残差二乗和の断面平均値，m：各測線の鉛直方向データ測点数，n：横断方向データ測線数である．すなわち，**図-3上段**は断面内の平均的な残差の断面平均流速に占める割合を各関数形の自由度ごとに示している．各手法の誤差の割合は，主流に対して自由度3で10%～14%，自由度2で18%程度である．二次流に対しては自由度3で3%，自由度2で4%～6%程度である．各関数形とも自由度1から自由度3の間で精度が大きく向上することが分かる．**図-3中段**には水表面流速の誤差，**図-3下段**には底面流速の誤差をそれぞれ示している．自由度3の底面流速解析法は水表面流速と底面流速を境界条件に用いているため，誤差は存在しない．底面流速に着目すれば（**図-3下段**），フーリエ級数，多項式，底面流速解析法の順に誤差が小さくなっている．フーリエ級数は周期関数の特徴から，境界で速度勾配ゼロの条件が課される．この条件は，水面では流体に加わるせん断応力が小さくなるため物理的に重要であるが，流速勾配の大きい底面付近を記述するには適さないことが分かる．また，重み付残差法の多項式による近似では，自由度4まで考慮すれば全体の分布と水表面流速の誤差は5%となり，底面流速でも10%ほどとなる．底面流速解析法においても重み付残差法により，さらに基礎方程式を増やしていくことで関数形の精度を上げることが出来る．しかし，解析モデルのもつ他の誤差を考慮すると，これ以上の関数精度の向上は必要でないと考えられ，底面流速解析法の三次多項式は合流部の流速鉛直分布を概ね再現出来ていると考える．

3．水表面流速方程式を付加した一般座標系底面流速解析法

図-4に底面流速解析法の枠組みを示す．底面流速解析法では，河床z_0からわずかに上の面z_b(z_b=z_0+δz_b, $\delta z_b/h$ <<1)を底面とし，底面から水面までの流れが解かれる[6),9)]．底面流速は水深積分した渦度と水表面流速を用いて式(8)で表す．なお，底面の位置は底面せん断応力と底面流速の関係式によって定義されることとなる[6),9)]．

$$u_{bi} = u_{si} - \varepsilon_{ij3}\Omega_j h \tag{8}$$

ここに，i,j=1,2(x,y方向)，ε_{ij3}：エディトンのイプシロンである．水表面流速を解かずに二次多項式(1)で流速鉛直分布を仮定する底面流速解析法(以下，二次底面流速解析法)では，水表面流速を流速鉛直分布関数($u_{si}=U_i+(\delta u_i-\Delta u_i)/2$)より仮定する[6)]ため，底面流速と水表面流速が流速鉛直分布関数に直接的に依存し，また，関数の自由度も少ないため合流部の複雑な流れ場への適用には十分でない．そこで，一般座標系において，水表面流速を解いて三次多項式(2)で流速鉛直分布を仮定する底面流速解析法(以下，本解析法)を開発する．本解析法では，流速鉛直分布は式(2)で与える．基礎方程式には，一般座標系の連続式，水深積分運動方程式[1)]に加えて，水深積分渦度方程式(9)と水表面流速方程式を用いる．

$$\frac{\partial J\Omega_i h}{\partial t} = J\left(ER_{\sigma i} + P_{\omega i} + \frac{\partial h\Delta\eta D_{\omega\xi i}}{\partial\xi} + \frac{\partial h\Delta\xi D_{\omega\eta i}}{\partial\eta} \right) \tag{9}$$

$$D_{\omega\xi i} = -U_\xi\Omega_i + U_i\Omega_\xi + \overline{\omega'_\xi u'_i} - \overline{\omega'_i u'_\xi} + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega}\left(\frac{\partial\Omega_i}{\partial\tilde{\xi}} + \cos\theta^{\eta\xi}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\tilde{\eta}} \right)$$

$$D_{\omega\eta i} = -U_\eta\Omega_i + U_i\Omega_\eta + \overline{\omega'_\eta u'_i} - \overline{\omega'_i u'_\eta} + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega}\left(\frac{\partial\Omega_i}{\partial\tilde{\eta}} + \cos\theta^{\eta\xi}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\tilde{\xi}} \right)$$

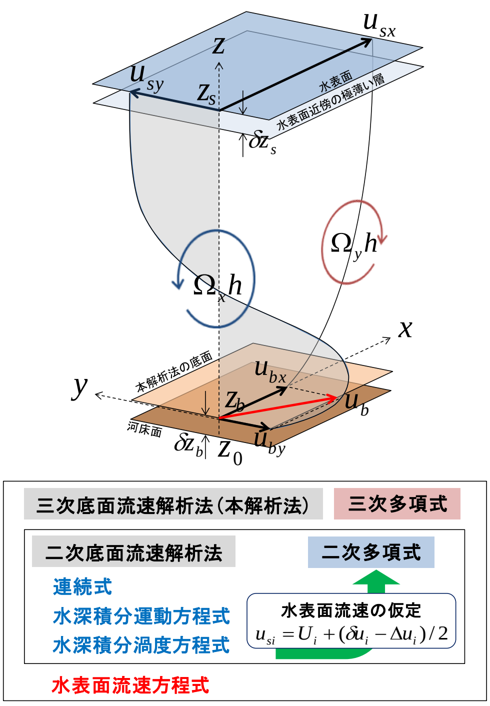

図-4 底面流速解析法の枠組

ここに，i,j=1,2(x,y方向)，u_ξ ,u_η：ξ,η方向流速，U_ξ ,U_η：ξ,η方向水深平均流速，u'_ξ ,u'_η,u'_i：ξ,η,i方向流速の水深平均値からの偏差成分，ω_ξ ,ω_η ,ω_i：ξ,η,i方向渦度，Ω_ξ ,Ω_η ,Ω_i：ξ,η,i方向水深平均渦度，ω'_ξ ,ω'_η ,ω'_i：ξ,η,i方向渦度の水深平均値からの偏差成分，$ER_{\sigma i}$：水面と底面に垂直な渦の回転，$D_{\omega\xi i}$, $D_{\omega\eta i}$：水平方向の移流，回転・伸縮，分散，乱流混合によるi方向渦度のフラックス，$P_{\omega i}$：i方向渦度の生産項，σ_ω=1.0である．なお，θ等の一般座標系に関する諸量は福岡ら[1)]の定義に基づいており，流速や渦度は全て物理成分である．渦動粘性係数ν_tについては，乱れの輸送方程式[6),9)]を解かずに，水平方向流速と流速鉛直分布のひずみ速度テンソルによる乱れの局所平衡を仮定して計算する．式(9)の上付きバーで示している箇所は，渦度と流速の鉛直分布による二次の相関項であり，仮定した流速鉛直分布を用いて水深積分することで求めている．渦度の鉛直分布は式(2)の一回微分としている．また，水深積分運動方程式の応力項においても同様に評価し，流速鉛直分布による水平方向の運動量輸送を考慮している．水表面流速方程式は，水面での運動学的境界条件，力学的境界条件を与え，水面の曲率を無視することにより式(10)で表わされる．

$$\frac{\partial u_{si}}{\partial t}+u_{sj}\frac{\partial u_{si}}{\partial x_j}=-g\frac{\partial z_s}{\partial x_i}+P_{si} \qquad (10)$$

生産項P_{si}は，水面近傍の極薄い層(δz_s<<dx,dy)底面に働くせん断応力を表している．せん断応力をブシネスク近似により表せば，三次の流速鉛直分布式(2)を用いて，水面周りのテイラー展開より式(11)が得られる．

$$P_{si}=\frac{2\nu_t}{h^2}\left\{12C_{ps}\left(u_{sei}-u_{si}\right)-\left(3\delta u_i-6\Delta u_i\right)\right\} \qquad (11)$$

ここで，式(11)導出の際には，水面近傍の渦動粘性係数が水深平均の渦動粘性係数ν_tに比例するとし，平衡状態で水表面流速u_{si}=u_{sei}（=U_i+(δu_i－Δu_i)/2）となる様に比例係数を設定し，式形を整理している．式(11)右辺のu_{si}－u_{sei}で表される項は水表面流速u_{si}を平衡状態の水表面流速u_{sei}に漸近させる役割を持つ．これは，三次多項式(2)は，流れの三次元性が小さくなるに従いη^3の項が小さくなり，平衡状態で二次多項式(1)に一致することを示す．したがって，本解析法は二次底面流速解析法を包括している．本解析では，モデルの不十分さを補い，計算を安定させるために係数C_{ps} (=1.5) を導入している．生産項（式(11)）は，運動方程式の応力項や，渦度方程式(9)の二次の相関項・生産項と同様に，水深平均流速，水深積分渦度，および水表面流速より計算される流速鉛直分布によって計算される．即ち，本解析法では，これらの方程式が流速鉛直分布を介して，相互に影響しながら一体的に解かれ，流れ場が求められる．なお，解析には式(10)を一般座標系に変換した式(12)を用いる．（ここではξ方向のみ示す）

$$\frac{\partial u_{s\xi}}{\partial t}+u_{s\xi}\frac{\partial u_{s\xi}}{\partial\tilde{\xi}}+u_{s\eta}\frac{\partial u_{s\xi}}{\partial\tilde{\eta}}-\tilde{J}\left(u_{s\eta}-u_{s\xi}\cos\theta^{\eta\xi}\right)\left(u_{s\xi}\frac{\partial\theta^{\xi}}{\partial\tilde{\xi}}+u_{s\eta}\frac{\partial\theta^{\xi}}{\partial\tilde{\eta}}\right)$$
$$=-g\left(\frac{\partial z_s}{\partial\tilde{\xi}}+\cos\theta^{\eta\xi}\frac{\partial z_s}{\partial\tilde{\eta}}\right)+P_{s\xi} \qquad (12)$$

($u_{s\xi}$：反変ξ方向水表面流速，$u_{s\eta}$：反変η方向水表面流速，$P_{s\xi}$:ξ方向生産項)

4．本解析法と二次底面流速解析法による解析結果と実測流速分布の比較

図-5に水深平均流速ベクトルの実測値（黒矢印）と解析値（赤矢印）を示す．～線はCSとKRの流体の境界を表している．実測では，断面A~Bでは境界が右岸付近まで達し，最大流速域は水路中央より右岸寄りに発生している．また，断面B',Cでは左岸に剥離域が生じている．これは，流量比(Q_{CS}/Q_{KR})1.74であるためCSの流れが相対的に大きな運動量を有すること，また，平均水深(D_{KR}=0.27m, D_{CS}=0.20m)が浅い流れであるため地形の影響を強く受け，合流後KR左岸の砂州によりCSからの流れが大きく曲げられるためであると考えられる．断面B'~Eでは水路中央付近でやや流速が低減し，その両側で速い流速域が形成されている．これは，後述するように，CSの大きな流入曲率のため発達する二次流により，水深平均流れ場が変化したためと考えられる．解析では，断面Aにおいてからの流れが実測に比べ小さな曲率で流入しているため，断面A~B'での最大流速域がやや水路中央に移動している．この原因には，合流部左岸の砂州の地形や抵抗を正しく評価出来ていないことが考えられるが，地形データの詳細や流れ条件が不明であることから，本論文ではこれ以上の検討はしないこととする．断面Cでは右岸際の流速がやや小さく，左岸際には逆流が生じているものの，本解析法では断面C~Eでの最大流速が二つの極を持って生じる点を再現出来ている．二次底面流速解析法では全体的に平滑化された流速分布となっており，この特徴は再現出来ていない．図-6には解析の水深平均

図-5 水深平均流速ベクトル

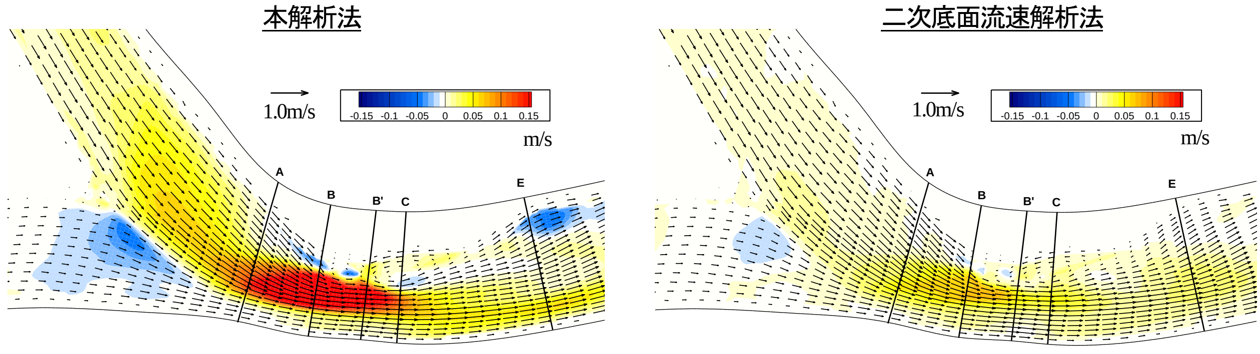

図-6 水深平均流速ベクトルと二次流の関係

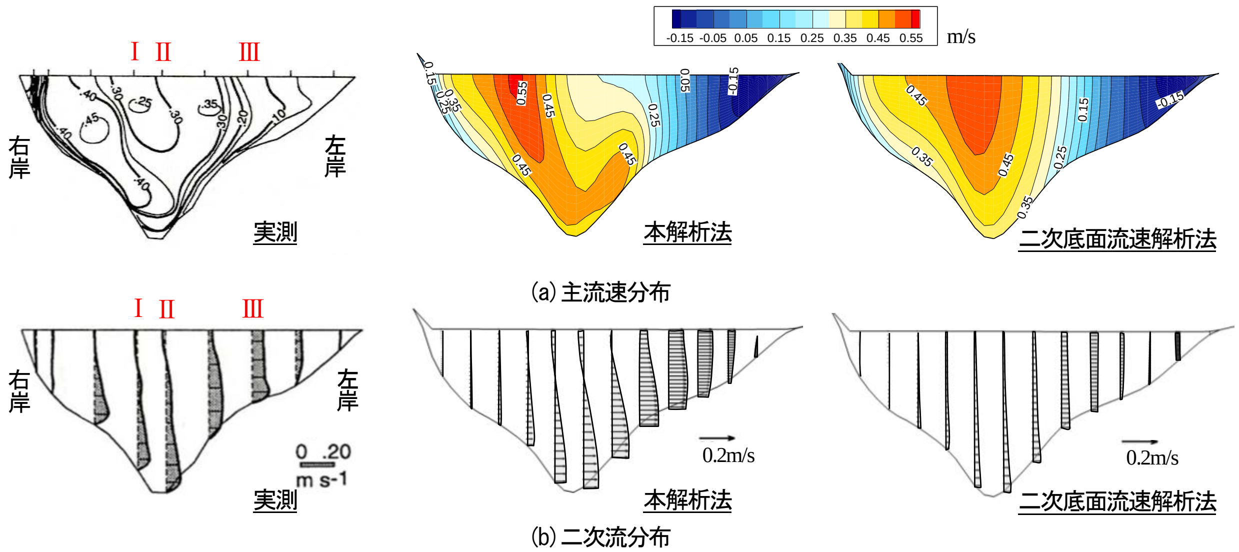

図-7 主流速分布と二次流分布の比較(断面C)

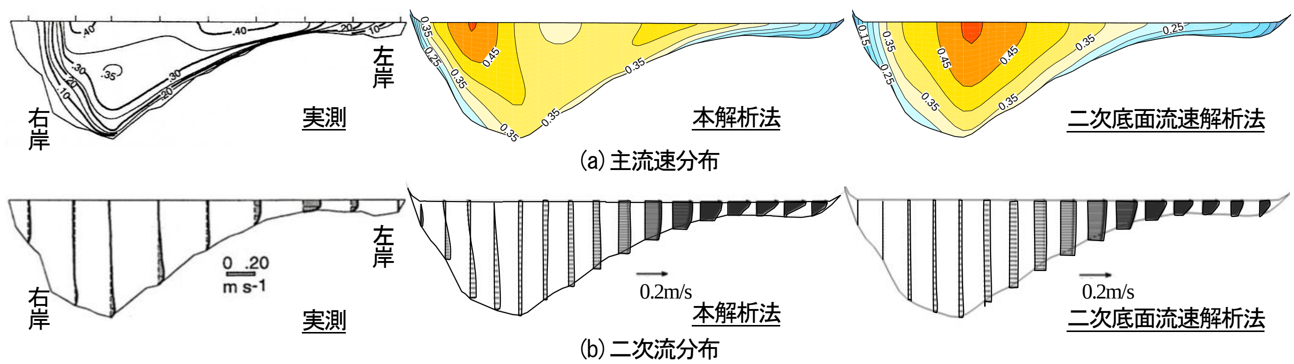

図-8 主流速分布と二次流分布の比較(断面E)

流速ベクトルと水深積分渦度の水深平均流速ベクトル方向成分をコンターで示している．合流部頂点より下流では二つの対になる二次流が発生しているが，KR側の二次流は弱く，断面Aより下流ではCS側の二次流が卓越している．この二次流は，断面A~B'において最も大きな値となり，断面E付近では減衰している．本解析法と二次底面流速解析法では二次流の分布は似ているが，発達する強度が異なることが分かる．**図-7, 8**に断面C,Eにおける主流速と二次流速の鉛直分布をそれぞれ示す．断面C(**図-7**)では，二次流の影響により，水面付近の相対的に速い流体がKR右岸の底面付近へ運ばれ，底面の遅い流体がKR左岸の水面付近へ運ばれることで複雑な流速分布となっている．解析ではKR右岸に十分流れが寄っていないため主流速や二次流の中心がやや水路中央に寄っている．また，二次底面流速解析法では合流部の複雑な流速分布を十分に再現出来ていない．本解析法においても，水路中央の鉛直方向に変曲点を三つ以上持つような複雑な流速分布は再現出来ていないものの，二次流場や二次流により形成される主流速の鉛直分布の歪み等，主要な特徴については概ね説明出来ている．断面E(**図-8**)では，二次流はほとんど減衰しているが，水路中央より左岸側において左岸へ向かう流速が生じ(**図-8(b)**)，水路中央よりやや両側で水面付近において二つの最大流速域が発生している(**図-8(a)**)．二次底面流速解析法では，これらの複雑な流速分布を再現出来ていない．これは，単調な流速分布式を用いる二次底面流速解析法では，合流部の二次流の発達・変形(**図-6**)やそれに伴う水深平均流れ場の特徴(**図-5**)を十分捉えることが出来ないことが原因と考えられる．一方，本解析法ではこれらの流速分布の特徴を概ね再現出来ており，合流部における二次流の発達・変形とそれに伴う複雑な運動量交換を評価出来ると考えられる．

以上より本解析法では，CSからの流入曲率が異なるものの，二次流が十分発達した断面Cより下流においては，水深平均の流れ場，二次流，主流速分布の特徴を概ね説明出来ており，水表面流速方程式と水深積分渦度方程式を解いて流速鉛直分布を三次多項式で仮定する底面流速解析法は，合流部の特徴的な二次流の発達・変形機構とそれによる運動量輸送を評価出来ると考えられる．

５．結論

本研究では，河川合流部で測られた実測データ[10)]を用いて，流速鉛直分布の評価法とその精度を検証した．また，水表面流速方程式を付加した一般座標系底面流速解析法を開発し，実河川合流部の実測データ[10)]に適用し，検証した．その結果以下の結論を得た．

1. 水表面流速方程式を付加した底面流速解析法の三次多項式は等しい自由度において，水表面と底面流速を一致させつつ，全体の残差については，残差を最小とする流速分布(重み付残差法)の精度と同程度であり，合流部の複雑な流速分布を再現出来る．
2. 水面での速度勾配ゼロの条件は流速分布の再現精度を上げるために重要である．しかし，フーリエ級数表示は底面付近においても勾配ゼロの条件が課されるため，多項式表示に比較して流速分布の再現精度が低くなる．
3. 合流部の複雑な運動量交換機構は単調な流速分布式を用いる二次底面流速解析法では説明することは出来ない．水表面流速方程式を付加した本解析法では，合流部の主流と二次流の分布やそれに伴う水深平均流れ場の特徴を説明出来る．

参考文献

1) 福岡捷二：洪水流の水理と河道の設計法，森北出版，2005.
2) Best, J. L. :Flow dynamics at river channel confluences: Implications for sediment transport and bed morphology, In *Recent Developments in Fluvial Sedimentology*, Society of Economic Palaeontologists and Mineralogists Special Publication 39, pp.27-35, 1987.
3) Best, J. L., Reid, I.:Separation zone at open-channel junctions, *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol.110, No.11, pp.1588-1594, 1984.
4) 例えば，Miyawaki, S., Constantinescu, G., Rhoads, B., Sukhodolov, A.:Changes in three-dimensional flow structure at a river confluence with changes in momentum ratio, *Proc. River Flow*, Braunschweig, Germany, 2010.
5) Bradbrook, K. F., Lane, S. N., Richards, K. S., Biron, P. M., Roy, A. G. :Role of bed discordance at asymmetrical river confluences, *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol.127, No.5, pp.351-368, 2001.
6) 内田龍彦，福岡捷二：浅水流方程式と渦度方程式を連立した準三次元モデルの提案と開水路合流部への適用，水工学論文集，第53巻，pp.1081-1086，2009.
7) 福岡捷二，五十嵐崇博，西村達也，宮崎節夫：河川合流部の洪水流と河床変動の非定常三次元解析，水工学論文集，第39巻，pp.435-440，1995.
8) 石川忠晴，鈴木研司，田中昌宏：開水路流の準三次元計算法に関する基礎的研究，土木学会論文集，No.375/II-6，pp.181-189，1986.
9) 内田龍彦，福岡捷二：底面流速解法による連続する水没水制群を有する流れと河床変動の解析，土木学会論文集B1，Vol. 67，No. 1，16-29，2011.
10) Rhoads, B. L. and Kenworthy, S. T. :Flow structure at an asymmetrical stream confluence, *Geomorphology*, Vol.11, pp.273-293, 1995.
11) 岡村誠司，岡部和憲，福岡捷二：洪水流の縦断水面形変化と準三次元流解析法を用いた石狩川河口部の洪水中の河床変動解析，河川技術論文集，第16巻，pp.125-130，2010.
12) 忠津哲也，内田龍彦，石川武彦，福岡捷二：洪水中の砂州の変形と河川構造物周辺の局所洗掘，水工学論文集，第54巻，pp.829-834，2010.

(2011. 9. 30受付)